ЭЛЕМЕНТАРНАЯ
ГЕОМЕТРІЯ

ВЪ ОБЪЕМѢ

ГИМНАЗИЧЕСКАГО КУРСА.

А. Давидова.

МОСКВА.
Въ Университетской Типографіи (Катковъ и К^{о}).
1864.

Дозволено цензурой. Москва Октября 27-го 1864 года.

ВВЕДЕНІЕ.

Все, что можно увеличивать и уменьшать, мы называемъ *величиною*. Такъ напр. различныя свойства тѣлъ: твердость, упругость, вѣсъ, протяженіе и другія могутъ быть разсматриваемы какъ величины, потому что тѣла могутъ имѣть большую или меньшую твердость, большую или меньшую упругость, большій или меньшій вѣсъ, большее или меньшее протяженіе. Ученіе о величинахъ вообще называется *математикою*; отдѣлъ же математики, содержащій ученіе о протяженіи, называется *Геометріею*. *)

Геометрія разсматриваетъ тѣла только относительно пространства ими занимаемаго, не обращая вниманія на другія ихъ свойства, и вслѣдствіе этого *геометрическимъ тѣломъ*, или просто *тѣломъ* въ Геометріи называютъ пространство, со всѣхъ сторонъ ограниченное, независимо отъ вещества его наполняющаго.

---

*) Греческое слово *Геометрія* означаетъ землемѣріе (ἡ γῆ — земля, μετρέω — мѣрю), и указываетъ на первоначальное приложеніе ея, состоявшее въ измѣреніи разстояній на земной поверхности. Заслуга научнаго развитія Геометріи принадлежитъ древнимъ Грекамъ, а между ними въ особенности замѣчателенъ въ этомъ отношеніи Евклидъ, (300—250 лѣтъ до Р. Х.), составившій ученіе элементарной Геометріи въ томъ видѣ, въ какомъ оно и до сихъ поръ осталось.

Предѣлъ тѣла называется *поверхностью*, предѣлъ поверхности — *линіею*, предѣлъ линіи — точкою.

Тѣла имѣютъ три измѣренія: *длину*, *ширину* и *высоту*; поверхности — два измѣренія: *длину* и *ширину*, линіи — одно измѣреніе: *длину*, а точка не имѣетъ никакого измѣренія.

Геометрическія линіи и точки не могутъ быть представлены чертежемъ; всякая начерченная линія или точка имѣетъ нѣкоторую ширину и высоту и представляетъ поэтому тѣло, котораго два или всѣ три измѣренія весьма малы.

Такъ какъ поверхность есть предѣлъ тѣла, линія—предѣлъ поверхности, точка—предѣлъ линіи, то нельзя разсматривать тѣло какъ рядъ послѣдовательныхъ поверхностей, поверхность какъ рядъ послѣдовательныхъ линій и линію какъ рядъ послѣдовательныхъ точекъ, но можно вообразить, что движеніемъ поверхности образуется тѣло, движеніемъ линіи—поверхность, движеніемъ точки—линія. Если разсматриваемъ линію какъ происшедшую отъ перемѣщенія точки, то въ такомъ случаѣ линія содержитъ всѣ мѣста, чрезъ которыя точка послѣдовательно переходила, и при такомъ представленіи, линія называется *геометрическимъ мѣстомъ точекъ*, которыя она содержитъ.

Линіи бываютъ *прямыя* и *кривыя;* прямая линія называется просто *прямая*. Различіе между прямой и кривой линіею не можетъ быть объяснено; оно сознается ясно и опредѣленно каждымъ. Понятіе о прямой линіи принадлежитъ къ основнымъ понятіямъ, не допускающимъ никакого опредѣленія.

Линія, составленная изъ нѣсколькихъ прямыхъ, не въ одной прямой лежащихъ, называется *ломаной*.

Поверхности бываютъ *плоскія* и *кривыя;* когда всякая прямая линія, соединяющая двѣ какія-нибудь точки поверхности, лежитъ вся на этой поверхности, то такая поверхность называется *плоскою* или просто *плоскостію*, всякая же поверхность, не состоящая изъ плоскостей называется *кривою*.

Геометрія дѣлится на Геометрію на плоскости, называемую ***Планиметріею***, и Геометрію въ пространствѣ, называемую *Стереометріею;* въ первой разсматриваются протяженія, которыя могутъ быть представлены на плоскости, во второй разсматриваются протяженія, которыя не могутъ быть представлены на плоскости; въ этой же части изучаются по преимуществу свойства геометрическихъ тѣлъ.

Планиметрія вмѣстѣ съ Стереометріею называется *элементарной Геометріею*, въ отличіе отъ *высшей Геометріи*, изслѣдующей преимущественно свойства кривыхъ линій и поверхностей.

Всѣ геометрическія заключенія выводятся изъ нѣкоторыхъ истинъ, самихъ собою очевидныхъ; такія истины называются *аксіомами*. Такія аксіомы суть напр. предложенія: цѣлое равно суммѣ всѣхъ своихъ частей; цѣлое больше каждой изъ своихъ частей; двѣ величины равныя порознь третьей, равны между собою; если отъ равныхъ величинъ отнимемъ по ровну или къ нимъ прибавимъ по ровну, то получатся величины равныя, и т. п.

Теоремою или *предложеніемъ* называется истина, которая становится очевидною только послѣ нѣкотораго ряда разсужденій. Эти разсужденія, обнаруживающія справедливость теоремы, называются *доказательствомъ*.

Проблемою или *задачею* называется вопросъ, отвѣтъ на который, основывается на доказанныхъ предложеніяхъ.

Леммою называется теорема, которая не имѣетъ непосредственной связи съ предъидущими теоремами, но вводится для доказательства другой болѣе важной теоремы или для рѣшенія задачи.

Всякая теорема состоитъ изъ двухъ частей: изъ *предположенія* и *заключенія* изъ него выводимаго. Теорема называется *обратною* въ отношеніи другой, когда заключеніе становится предположеніемъ и предположеніе—заключеніемъ. Не всѣ обратныя предложенія справедливы.

ЧАСТЬ I.

ПЛАНИМЕТРІЯ.

ГЛАВА I.

О прямыхъ линіяхъ и углахъ.

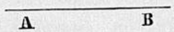
§ 1. *Аксіома. Прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками.*

Это предложеніе слѣдуетъ прямо изъ понятія, которое мы имѣемъ о прямой линіи.

Такъ какъ между двумя точками можетъ быть только одно кратчайшее разстояніе, то *между двумя точками можно вообразить только одну прямую линію*, — это значитъ, что двѣ точки вполнѣ опредѣляютъ положеніе прямой линіи чрезъ нихъ проходящей.

Изъ этихъ основныхъ свойствъ прямой слѣдуетъ, что двѣ прямыя, пересѣкающіяся въ одной точкѣ, въ другой точкѣ болѣе встрѣтиться не могутъ, потому что иначе чрезъ тѣ же двѣ точки проходили бы двѣ различныя прямыя, между тѣмъ какъ между двумя точками возможна только одна прямая.

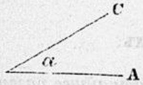
Приложивъ къ двумъ точкамъ *A* и *B* (черт. 1) линейку и проведя по ней черту, получимъ изображеніе прямой. Это изображеніе называется также прямой линіею, хотя между изображеніемъ и самой линіею есть существенное различіе: прямая линія можетъ быть про-



Черт. 1.

ведена только мысленно и доступна только воображенію, между тѣмъ какъ изображеніе ея представляетъ тѣло, имѣющее весьма малую ширину и высоту. (*) Прямая линія обозначается двумя буквами, поставленными въ двухъ какихъ-нибудь точкахъ ея, и эти двѣ буквы составляютъ названіе линіи; такъ напр. прямая линія въ черт. 1 называется линіею **AB**.

§ 2. *Угломъ называется неопредѣленная часть плоскости, заключенная между двумя прямыми, выходящими изъ одной точки.* Точка *B* (черт. 2) изъ которой выходятъ линіи называется *вершиною*, самыя же линіи *BA* и *BC*, составляющія уголъ, *сторонами* его. Уголъ обозначается тремя буквами *ABC*, такъ что буква стоящая у вершины ставится между двумя другими буквами.

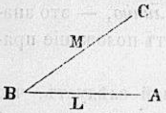


Черт. 2.

Уголъ обозначается иногда и одной буквою *B*, стоящею у вершины, или буквою *a* поставленной внутри его.

Вмѣсто слова уголъ употребляется также знакъ ∠.

При представленіи угла не принимаемъ въ соображеніе длину его сторонъ; такъ напримѣръ *ABC* и *LBM* (черт. 3) означаютъ одинъ и тотъ же уголъ.

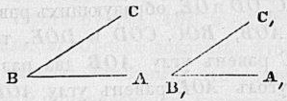


Черт. 3.

(*) *Замѣчаніе.* Если разстояніе двухъ точекъ слишкомъ значительно, чтобы провести чрезъ нихъ прямую линію съ помощію линейки, въ такомъ случаѣ натягиваютъ между этими точками веревку предварительно покрытую слоемъ какого-нибудь окрашивающаго вещества; приводя натянутую веревку въ сотрясеніе, получимъ на поверхности окрашенный слѣдъ ея, который изображаетъ прямую линію.

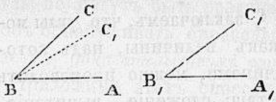
Когда требуется провести на поверхности земли прямую линію весьма значительной длины, въ такомъ случаѣ отмѣчаютъ только концы этой линіи и нѣкоторыя точки между ними, съ помощію знаковъ, называемыхъ *вѣхами*.

§ 3. Два угла *ABC* и $A_1B_1C_1$ (черт. 4) называются равными, независимо отъ длины ихъ сторонъ, когда наложивъ вершину B_1 на вершину *B* а сторону B_1A_1 на сторону *BA*, найдемъ, что другая сторона B_1C_1 сольется съ стороною *BC*.



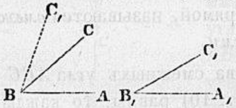
Черт. 4.

Когда же при наложеніи вершины B_1 угла $A_1B_1C_1$ (черт. 5) на вершину *B* угла *ABC* и стороны B_1A_1 на сторону *BA*, найдемъ, что сторона B_1C_1 направлена по линіи BC_1, лежащей внутри угла *ABC* то говорятъ, что уголъ $A_1B_1C_1$ меньше угла *ABC*, или уголъ *ABC* больше угла $A_1B_1C_1$.



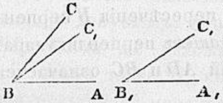
Черт. 5.

Если же уголъ $A_1B_1C_1$ (черт. 6) приложимъ къ углу *ABC* такъ, чтобы вершина B_1 совпала съ вершиною *B*, сторона B_1A_1 слилась съ стороною *BC* и сторона B_1C_1 была направлена по линіи BC_1, лежащей внѣ угла *ABC*, то составится уголъ ABC_1, который называется суммою двухъ угловъ *ABC* и $A_1B_1C_1$.



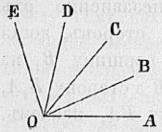
Черт. 6.

Если положимъ, что уголъ $A_1B_1C_1$ (черт. 7) меньше угла *ABC*, и наложимъ первый уголъ на второй такъ, чтобы вершина B_1 совпала съ вершиною *B*, сторона B_1A_1 слилась съ стороною *BA*, а сторона B_1C_1 была направлена по линіи BC_1, лежащей внутри угла *ABC*, то составится уголъ $C_1B\,C$, который называется разностью двухъ угловъ *ABC* и $A_1B_1C_1$.



Черт. 7.

Если изъ точки O (черт. 8) выходятъ нѣсколько линій OA, OB, OC, OD и OE, образующихъ равные углы AOB, BOC, COD и DOE, то уголъ AOC равенъ углу AOB два раза взятому, уголъ AOD равенъ углу AOB три раза взятому, и уголъ AOE равенъ углу AOB четыре раза взятому. Наоборотъ, уголъ AOB есть половина угла AOC, третья часть угла AOD и четвертая часть угла AOE.

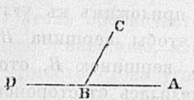


Черт. 8.

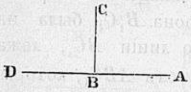
Изъ сказаннаго въ этомъ § заключаемъ, что углы могутъ быть разсматриваемы какъ величины, надъ которыми, какъ надъ всѣми величинами, можно производить четыре ариѳметическія дѣйствія: сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе.

§ 4. Два угла ABC и DBC (черт. 9), имѣющіе общую вершину B, одну общую сторону BC и двѣ другія стороны BA и BD на одной прямой, называются *смежными углами*.

Черт. 9.



Когда два смежныхъ угла ABC и DBC (черт. 10) равны, то каждый изъ нихъ называется *прямымъ угломъ*; слѣдов. *прямой уголъ есть одинъ изъ двухъ равныхъ смежныхъ угловъ*. Линія BC (черт. 10), составляющая съ линіею AD прямой уголъ, называется *линіею перпендикулярною* или просто *перпендикуляромъ*, а точка пересѣченія B перпендикуляра CB съ линіею AD — *основаніемъ* перпендикуляра.



Черт. 10.

Перпендикулярность двухъ линій AD и BC означается иногда такъ: $BC \perp AD$.

Всякая линія, неперпендикулярная къ другой, называется относительно послѣдней *наклонной линіею*.

Углы въ отношеніи къ прямому углу раздѣляются на углы *острые* и *тупые*; острымъ угломъ называется уголъ меньшій прямаго, а тупымъ — большій прямаго.

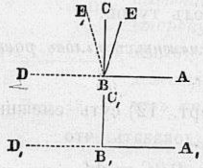
§ 5. Теорема. *Всѣ прямые углы равны между собою.*

Пусть будутъ ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 11) два прямыхъ угла, требуется доказать, что они равны между собою.

Доказ. Замѣтимъ, что одинъ изъ способовъ обнаружить справедливость какого нибудь предложенія состоитъ въ томъ, что доказывается невозможность противнаго предложенія; такъ напр. вмѣсто того, чтобы доказать, что прямые углы равны, можно доказать, что прямые углы не могутъ быть различны между собою. Этотъ способъ обнаруживать справедливость предложенія, называется *доказательствомъ отъ противнаго*.

Приложимъ этотъ способъ къ обнаруженію равенства прямыхъ угловъ.

Пусть будутъ, если это возможно ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 11) два прямыхъ угла не равныхъ между собою, и положимъ, что уголъ $A_1B_1C_1$ меньше угла ABC. Продолживъ стороны AB и A_1B_1 и замѣтивъ, что прямой уголъ есть одинъ изъ двухъ равныхъ смежныхъ угловъ (§4), заключаемъ, что прямой уголъ ABC равенъ своему смежному углу DBC, и равнымъ образомъ прямой уголъ $A_1B_1C_1$ равенъ своему смежному углу $D_1B_1C_1$. Предположивъ же, что уголъ $A_1B_1C_1$ меньше угла ABC, мы, вслѣдствіе сказаннаго равенства угловъ, должны очевидно допустить, что и уголъ $D_1B_1C_1$ меньше угла DBC. Когда же наложимъ линію A_1D_1 на линію AD такъ, чтобъ точка B_1 совпала съ точкою B, то вслѣдствіе сдѣланнаго предположенія, что уголъ $A_1B_1C_1$ меньше угла ABC, сторона B_1C_1 будетъ направлена по линіи BE, лежащей внутри угла ABC; а такъ какъ изъ того же предположенія слѣдуетъ, что и уголъ $D_1B_1C_1$ меньше угла DBC, то сторона B_1C_1 въ тоже время



Черт. 11.

должна быть направлена по линіи *BE*, лежащей внутри угла *DBC*; это очевидно не возможно.

И такъ предположеніе, что два прямыхъ угла не равны между собою, приводитъ къ нелѣпому заключенію, что прямая линія должна имѣть въ одно и тоже время два различныхъ положенія Изъ этого мы заключаемъ, что всѣ прямые углы должны быть равны между собою.

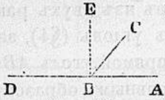
Прямой уголъ обозначается иногда буквою *d*, и съ нимъ, какъ съ величиною постоянною, сравниваютъ другіе углы.

Изъ предложенія, въ этомъ § доказаннаго, слѣдуетъ, что *въ точкѣ лежащей на прямой можно къ ней провести только одинъ перпендикуляръ;* всякая другая линія, проведенная чрезъ эту точку, составитъ съ этой прямой или уголъ острый или уголъ тупой.

§ 6. **Теорема.** *Всякая пара смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ.*

Положимъ, что *ABC* и *CBD* (черт. 12) суть смежные углы, требуется доказать, что

$$ABC + DBC = 2d.$$



Черт. 12.

Доказ. Вообразивъ линію *BE* перпендикулярную къ линіи *AD*, находимъ

$$ABC + CBE = d;\ DBE = d.$$

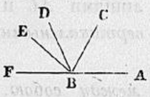
Сложивъ эти два равенства, замѣтивъ при этомъ, что углы *CBE* и *DBE* вмѣстѣ составляютъ одинъ уголъ *DBC*, находимъ

$$ABC + DBC = 2d.$$

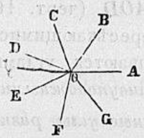
Изъ этого предложенія слѣдуетъ:

1. Одна пара смежныхъ угловъ равна другой парѣ.
2. Если одинъ изъ двухъ смежныхъ угловъ острый, то другой будетъ тупой, и наоборотъ.

3. Сумма угловъ *ABC*, *CBD*, *DBE*, *EBF* (черт. 13), лежащихъ по одной сторонѣ прямой *AF*, равна двумъ прямымъ, потому что вмѣстѣ они составляютъ одну пару смежныхъ угловъ, напр. пару смежныхъ угловъ *ABC* и *CBF*.



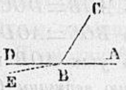
Черт. 13.



Черт. 14.

4. Сумма угловъ *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOE*, *EOF*, *FOG* и *GOA* (черт. 14), лежащихъ около одной точки, равна четыремъ прямымъ.

Обратная теорема. Если два угл: ABC и DBC (чер. 15), имѣютъ общую вершину B, одну общую сторону BC и вмѣстѣ равны двумъ прямымъ, то двѣ другія стороны BA и BD лежатъ на одной прямой линіи, и образуютъ по этому углы смежные.



Черт. 15.

Доказ. Положимъ, что *DBA* есть не прямая а ломаная линія, и пусть будетъ *BE* продолженіе стороны *AB*, такъ что *ABC* и *EBC* будутъ углы смежные. Такъ какъ, по § 6, сумма смежныхъ угловъ *ABC* и *EBC* равна $2d$, и, по положенію, сумма двухъ угловъ *ABC* и *DBC* также равна $2d$, то

$$ABC + EBC = ABC + DBC.$$

Отнявъ по углу *ABC*, находимъ, что углы *EBC* и *DBC* равны между собою, что очевидно невозможно, потому что уголъ *DBC* есть только часть угла *EBC*.

Слѣдов. предположеніе, что *DBA* не есть прямая линія, приводитъ къ нелѣпому заключенію, что часть равна своему цѣлому.

должна быть направлена по линіи *BE*, лежащей внутри угла *DBC*; это очевидно не возможно.

И такъ предположеніе, что два прямыхъ угла не равны между собою, приводитъ къ нелѣпому заключенію, что прямая линія должна имѣть въ одно и тоже время два различныхъ положенія Изъ этого мы заключаемъ, что всѣ прямые углы должны быть равны между собою.

Прямой уголъ обозначается иногда буквою *d*, и съ нимъ, какъ съ величиною постоянною, сравниваютъ другіе углы.

Изъ предложенія, въ этомъ § доказаннаго, слѣдуетъ, что *въ точкѣ лежащей на прямой можно къ ней провести только одинъ перпендикуляръ:* всякая другая линія, проведенная чрезъ эту точку, составитъ съ этой прямой или уголъ острый или уголъ тупой.

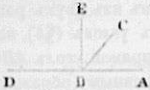
§ 6. Теорема. *Всякая пара смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ.*

Положимъ, что *ABC* и *CBD* (черт. 12) суть смежные углы, требуется доказать, что

$$ABC + DBC = 2d.$$

Доказ. Вообразивъ линію *BE* перпендикулярную къ линіи *AD*, находимъ

$$ABC + CBE = d;\ DBE = d.$$



Черт. 12.

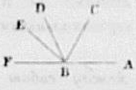
Сложивъ эти два равенства, замѣтивъ при этомъ, что углы *CBE* и *DBE* вмѣстѣ составляютъ одинъ уголъ *DBC*, находимъ

$$ABC + DBC = 2d.$$

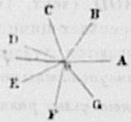
Изъ этого предложенія слѣдуетъ:

1. Одна пара смежныхъ угловъ равна другой парѣ.
2. Если одинъ изъ двухъ смежныхъ угловъ острый, то другой будетъ тупой, и наоборотъ.

3. Сумма угловъ *ABC*, *CBD*, *DBE*, *EBF* (черт. 13), лежащихъ по одной сторонѣ прямой *AF*, равна двумъ прямымъ, потому что вмѣстѣ они составляютъ одну пару смежныхъ угловъ, напр. пару смежныхъ угловъ *ABC* и *CBF*.



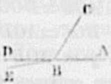
Черт. 13.



Черт. 14.

4. Сумма угловъ *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOE*, *EOF*, *FOG* и *GOA* (черт. 14), лежащихъ около одной точки, равна четыремъ прямымъ.

Обратная теорема. Если два угла ABC и DBC (чер. 15), *имѣютъ общую вершину B, одну общую сторону BC и вмѣстѣ равны двумъ прямымъ, то двѣ другія стороны BA и BD лежатъ на одной прямой линіи, и образуютъ по этому углы смежные.*



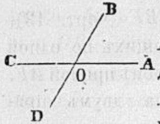
Черт. 15.

Доказ. Положимъ, что *DBA* есть не прямая а ломаная линія, и пусть будетъ *BE* продолженіе стороны *AB*, такъ что *ABC* и *EBC* будутъ углы смежные. Такъ какъ, по § 6, сумма смежныхъ угловъ *ABC* и *EBC* равна $2d$, и, по положенію, сумма двухъ угловъ *ABC* и *DBC* также равна $2d$, то

$$ABC + EBC = ABC + DBC.$$

Отнявъ по углу *ABC*, находимъ, что углы *EBC* и *DBC* равны между собою, что очевидно невозможно, потому что уголъ *DBC* есть только часть угла *EBC*.

Слѣдов. предположеніе, что *DBA* не есть прямая линія, приводитъ къ нелѣпому заключенію, что часть равна своему цѣлому.



Черт. 16.

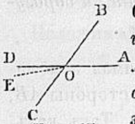
§ 7. Углы AOB и COD, равно и углы BOC и AOD (черт. 16), составленные двумя пересѣкающимися линіями AC и DB, называются углами *вертикальными* или *противуположными*.

Теорема. *Вертикальные углы равны между собою.* Пусть будутъ AOB и COD (черт. 16) вертикальные углы, требуется доказать, что $\angle AOB = \angle DOC$.

Доказ. Замѣтивъ, что углы AOB и AOD составляютъ пару смежныхъ угловъ, также углы AOD и DOC и что, по § 6 слѣд. 1, одна пара смежныхъ угловъ равна другой парѣ, находимъ:

$$AOB + AOD = AOD + DOC.$$

Отнявъ по равному углу AOD, находимъ $AOB = DOC$. Подобнымъ же образомъ доказывается, что $BOC = AOD$.



Черт. 17.

Обратная теорема. Если два равныхъ угла AOB и COD (черт. 17) имѣютъ общую вершину O и двѣ стороны OB и OC на одной прямой линіи, то и двѣ другія стороны OA и OD составляютъ одну прямую линію, и образуютъ поэтому углы противуположные.

Доказ. Положимъ, что AOD есть не прямая, но ломаная линія, и пусть будетъ OE продолженіе стороны AO, тогда углы AOB и COE будутъ углы противуположные и, по доказанному, равные между собою. Но, по положенію, уголъ DOC равенъ углу AOB; слѣдовательно уголъ EOC долженъ равняться углу COD, что очевидно не возможно, потому что COE есть только часть угла COD. И такъ предположеніе, что AOD не есть прямая линія, приводитъ къ нелѣпому заключенію, что часть равна своему цѣлому.

ГЛАВА II.

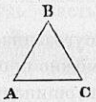
О фигурахъ.

О фигурахъ вообще. Равенство треугольниковъ. Свойство перпендикуляра и наклонныхъ. Задачи.

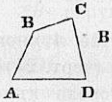
О фигурахъ вообще.

§ 8. Часть плоскости, со всѣхъ сторонъ ограниченная, называется *фигурою*, предѣлъ ея *периметромъ*. Когда фигура ограничена прямыми линіями, то она называется *прямолинейною*, когда же ограничена одной или нѣсколькими кривыми линіями — *криволинейною фигурою*. Линіи, ограничивающія фигуру, называются *сторонами* ея.

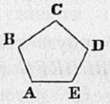
Прямолинейная фигура ABC (черт. 18), ограниченная тремя сторонами, называется *треугольникомъ*, фигура $ABCD$ (чер. 19), ограниченная четырьмя сторонами, — *четырехугольникомъ*, фигура $ABCDE$ (чер. 20), ограниченная пятью сторонами, — *пятиугольникомъ* и т. д. Фигура, ограниченная болѣе нежели четырьмя сторонами, называется также *многоугольникомъ*.



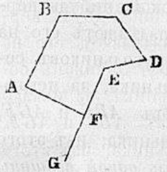
Черт. 18.



Черт. 19.



Черт. 20.

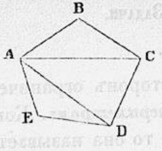


Черт. 21.

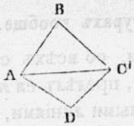
Уголъ, составленный двумя послѣдовательными сторонами многоугольника, напр. уголъ ABC шестиугольника $ABCDEF$ (черт. 21), называется *внутреннимъ угломъ*, или просто *угломъ* многоугольника, а уголъ, составленный одной стороною и продолженіемъ другой, смежной съ ней какъ напр. уголъ AFG, — *внѣшнимъ угломъ* многоугольника. Когда внутренній уголъ многоугольника болѣе двухъ прямыхъ, какъ напр. уголъ E, въ такомъ случаѣ онъ называется *входящимъ*.

Очевидно, что во всякомъ многоугольникѣ число его угловъ равняется числу его сторонъ.

§ 9. *Діагональю* многоугольника называется линія, соединяющая вершины двухъ угловъ, не прилежащихъ къ одной сторонѣ, напр. линія AC (черт. 22).



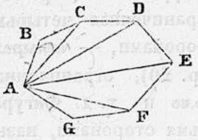
Черт. 22.



Черт. 23.

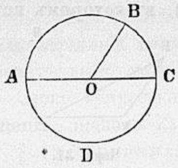
Очевидно, что треугольникъ не имѣетъ діагонали; изъ каждаго угла четырехугольника можно провести только одну діагональ, напр. изъ угла A (черт. 23) діагональ AC; изъ каждаго угла пятиугольника можно провести двѣ діоганали, напр. изъ угла A (черт. 22) діагонали AC и AD; и т. д.

Такъ какъ изъ какого нибудь угла A многоугольника $ABCDEFG$ (черт. 24) можно провести діагонали къ вершинамъ всѣхъ угловъ, исключая только два B и G — ближайшіе къ A, то очевидно, что *изъ каждаго угла многоугольника можно провести столько діагоналей, сколько многоугольникъ имѣетъ сторонъ безъ трехъ*.



Черт. 24.

§ 10. Діагонали, выходящія изъ какой нибудь вершины A многоугольника (черт. 24), раздѣляютъ его на треугольники. Каждый изъ этихъ треугольниковъ содержитъ по одной сторонѣ многоугольника, за исключеніемъ двухъ крайнихъ треугольниковъ ABC и AGF, содержащихъ по двѣ стороны многоугольника; изъ этого слѣдуетъ, что *діагонали выходящія изъ одной вершины многоугольника, раздѣляютъ его на столько треугольниковъ, сколько многоугольникъ имѣетъ сторонъ безъ двухъ*. Такъ напр. четырехугольникъ $ABCD$ (черт. 23) дѣлится діагональю AC на два, пятиугольникъ $ABCDE$ (черт. 22) двумя діагоналями AC и AD на три треугольника и т. д.



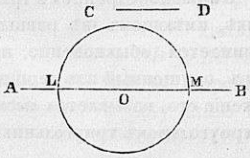
Черт. 25.

§ 11. Плоская фигура, ограниченная кривой линіею $ABCD$ (черт 25), которой всѣ точки отстоятъ на равномъ разстояніи отъ одной точки O, лежащей внутри ея, называется *кругомъ*, самая же кривая — *окружностью* круга. Точка O, равно отстоящая отъ всѣхъ точекъ окружности, называется *центромъ*, линія OB, соединяющая центръ съ какой нибудь точкою окружности — *радіусомъ*, а линія AC, проходящая чрезъ центръ отъ одной точки окружности до другой, — *діаметромъ* круга. Какая нибудь часть AB окружности называется *дугою*.

Всякій діаметръ AC раздѣляетъ кругъ на двѣ равныя части ABC и ADC. Въ самомъ дѣлѣ, стоитъ только перегнуть чертежъ по діаметру AC, тогда часть ABC совпадетъ съ частью ADC, потому что всѣ точки дуги ABC и дуги ADC равно отстоятъ отъ центра.

Изъ опредѣленія круга слѣдуетъ, что окружность есть геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, равно отстоящихъ отъ данной точки.

Для описанія окружности употребляется особый снарядъ, называемый *циркулемъ*. Съ помощію циркуля удобно рѣшается задача: отъ точки O на линіи AB (черт. 26) отложить часть равную данной линіи CD. Для этого изъ точки O описываемъ кругъ радіусомъ CD; точки пересѣченія L и M окруж-



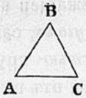
Черт. 26.

ности съ прямой AB отстоятъ отъ точки O на разстояніи равномъ CD, такъ что OM и OL равняются CD.

Окружность есть единственная кривая линія, которая разсматривается въ элементарной Геометріи.

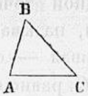
Равенство треугольниковъ.

§ 12. Треугольникъ ABC (черт. 27), въ которомъ всѣ три стороны равны между собою, называется *равностороннимъ*, треугольникъ ABC (черт. 28), съ двумя равными сторонами AB и CB — *равнобедреннымъ*, а треугольникъ ABC (черт. 29), составленный изъ трехъ неравныхъ сторонъ — *разностороннимъ*. Треугольникъ ABC (черт. 30) имѣющій прямой уголъ C, называется *прямоугольнымъ*, стороны AC и BC, заключающія прямой уголъ, — *катетами*, а сторона AB, лежащая противъ прямаго угла, — *гипотенузою*. Треугольникъ, неимѣющій прямаго угла, называется *косоугольнымъ*. Косоугольный треугольникъ, котораго всѣ углы острые, какъ въ черт. 27, 28, называется *остроугольнымъ*; треугольникъ же ABC (черт. 31), имѣющій тупой уголъ A, — *тупоугольнымъ*.

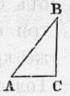


Черт. 27.

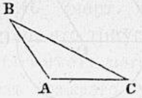
Черт. 28.



Черт. 29.

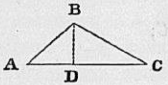


Черт. 30.

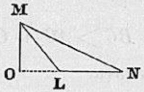


Черт. 31.

Одна какая-нибудь изъ сторонъ треугольника называется *основаніемъ*, а вершина противоположнаго ей угла — *вершиною* треугольника. Въ равнобедренномъ треугольникѣ, т. е. въ треугольникѣ, имѣющемъ двѣ равныя стороны, за основаніе принимается обыкновенно не равная сторона. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины на основаніе или на продолженіе его, называется *высотою*. Такъ напр., если въ остроугольномъ треугольникѣ ABC (черт. 32) примемъ за основаніе сторону AC, то перпендикуляръ BD опущенный на нее изъ вершины треугольника, будетъ высотою; если же въ косоугольномъ треугольникѣ LMN (черт. 33), примемъ за основаніе сторону LN, то перпендикуляръ MO, опущенный изъ вершины треугольника на продолженіе основанія, будетъ высотою.



Черт. 32.



Черт. 33.

Слово треугольникъ обозначается иногда, для сокращенія, знакомъ △.

§ 13. Теорема. *Во всякомъ треугольникѣ одна сторона менѣе суммы двухъ другихъ сторонъ.*

Доказ. Это предложеніе непосредственно слѣдуетъ изъ аксіомы § 1.

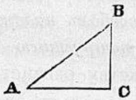
Положимъ, что въ треугольникѣ ABC (черт. 34), сторона AB больше стороны BC; такъ какъ, по предъидущему,

$$AC + CB > AB,$$

то, вычитая по CB, находимъ

$$AC > AB - CB;$$

т. е. *каждая сторона треугольника болѣе разности двухъ другихъ сторонъ.*



Черт- 34.

§ 14. Лемма. *Если внутри треугольника ABC* (чер. 35) *проведемъ ломаную линію AOC,* то

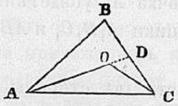
$$AB + BC > OA + OC.$$

Доказ. Продолживъ линію AO до пересѣченія съ стороною BC, находимъ, по предъидущему §,

$$AB + BD > AO + OD;\ OD + DC > OC;$$

складывая эти два неравенства, и замѣчая, что BD и DC составляютъ одну линію BC, получимъ:

$$AB + BC + OD > AO + OC + OD,$$



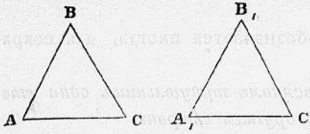
Черт. 35.

и если вычтемъ изъ обѣихъ частей неравенства по OD то находимъ

$$AB + BC > AC + OC;$$

что и требовалось доказать.

§ 15. Теорема. *Если двѣ стороны одного треугольника соотвѣтственно равны двумъ сторонамъ другаго, и углы, заключенные между этими сторонами также равны, то и самые треугольники равны.*



Черт. 36.

Положимъ, что (черт. 36); $AB = A_1B_1$; $BC = B_1C_1$ и уголъ ABC = углу $A_1B_1C_1$; требуется доказать, что $\triangle ABC$ равенъ $\triangle A_1B_1C_1$.

Доказ. Одинъ изъ простѣйшихъ способовъ обнаружить равенство двухъ величинъ, состоитъ въ томъ, что одну величину накладываемъ на другую и удостовѣряемся совпадаютъ онѣ, или нѣтъ. Этотъ способъ называется *способомъ наложенія*, а совпаденіе самыхъ величинъ — *конгруенціею.* *) Приложимъ этотъ способъ къ доказательству равенства двухъ треугольниковъ ABC и $A_1B_1C_1$.

Вообразимъ, что уголъ B_1 наложенъ на уголъ B; вслѣдствіе равенства этихъ двухъ угловъ, стороны B_1A_1 и B_1C_1 совпадутъ съ сторонами BA и BC; изъ равенства же самыхъ сторонъ слѣдуетъ, что точка A_1 упадетъ на A и точка B_1 на B; слѣдов. треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC совпадутъ и будутъ равны.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что двѣ стороны и уголъ, заключенный между ними, опредѣляютъ вполнѣ треугольникъ, потому что изъ этихъ трехъ частей можетъ быть составленъ только одинъ треугольникъ.

---

*) Конгруенція двухъ величинъ обозначается знакомъ: $\cong$

Если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 36), кромѣ того, равнобедренные, т. е. $AB = BC$ и $A_1B_1 = B_1C_1$, то можно наложить $\triangle A_1B_1C_1$ на $\triangle ABC$ такимъ образомъ, чтобы сторона B_1A_1 совпадала съ BC и сторона B_1C_1 съ BA; треугольники совмѣстятся и въ этомъ положеніи; но какъ тоже уголъ A_1 при первомъ наложеніи совпалъ съ угломъ A, — а при второмъ съ угломъ C, то заключаемъ, что углы A и C равны между собою. Отсюда слѣдуетъ:

§ 16. Теорема. *Въ равнобедренномъ треугольникѣ углы при основаніи равны.*

Очевидно, что, вслѣдствіе этой теоремы, въ равностороннемъ треугольникѣ всѣ три угла равны между собою.

§ 17. Теорема. *Если два угла одного треугольника соотвѣтственно равны двумъ угламъ другаго, и стороны, лежащія между этими углами, также равны, то и самые треугольники равны.*

Положимъ, что (черт. 36) $\angle A = \angle A_1$; $\angle C = \angle C_1$ и $AC = A_1C_1$; требуется доказать, что $\triangle ABC$ равенъ $\triangle A_1B_1C_1$.

Доказ. Наложимъ треугольникъ $A_1B_1C_1$ на треугольникъ ABC такъ, чтобы сторона A_1C_1 совпадала съ равной ей стороною AC; вслѣдствіе равенства угловъ A и A_1, сторона A_1B_1 сольется съ стороною AB, и вслѣдствіе равенства угловъ C и C_1, сторона C_1B_1 сольется съ стороною CB; но какъ двѣ прямыя могутъ пересѣкаться только въ одной точкѣ, то точка B_1 упадетъ на точку B. Слѣд. треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC совпадаютъ.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что одна сторона и два прилежащихъ къ ней угла опредѣляютъ вполнѣ треугольникъ, потому что изъ этихъ трехъ частей можетъ быть составленъ только одинъ треугольникъ.

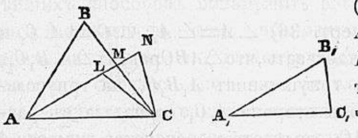
Если въ треугольникахъ ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 36) кромѣ того $\angle A = \angle C$ и $\angle A_1 = \angle C_1$, то можно наложить $\triangle A_1B_1C_1$ на $\triangle ABC$ такимъ образомъ, чтобы $\angle A_1$ совмѣстился съ $\angle C$, и $\angle C_1$ съ $\angle A_1$; треугольники совпадутъ и въ этомъ положеніи; но какъ таже линія A_1B_1 при первомъ наложеніи совпала съ стороною AB а при второмъ съ стороною BC, то изъ этого заключаемъ, что $AB=BC$. Отсюда слѣдуетъ:

§ 18. Теорема. *Въ треугольникѣ, въ которомъ два угла равны, противуположныя имъ стороны также равны,* т. е. треугольникъ съ двумя равными углами есть треугольникъ равнобедренный.

Очевидно, что вслѣдствіе этого треугольникъ съ тремя равными углами есть треугольникъ равносторонній.

§ 19. Лемма. *Если двѣ стороны одного треугольника соотвѣтственно равны двумъ сторонамъ другаго, но углы между этими сторонами неравны, то противъ большаго угла лежитъ и бо́льшая сторона.*

Положимъ, что въ двухъ треугольникахъ ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 37) $AB=A_1B_1$; $AC=A_1C_1$, а уголъ $BAC >$ угла $B_1A_1C_1$; требуется доказать, что $BC > B_1C_1$.



Черт. 37.

Доказ. Наложимъ $\triangle A_1B_1C_1$ на $\triangle ABC$ такъ, чтобы сторона A_1C_1 совпала съ равною ей стороною AC. Такъ какъ уголъ $C_1A_1B_1$ меньше угла CAB, то линія A_1B_1 пойдетъ по направленію AN между сторонами AC и AB, и точка B_1 упадетъ или внутри треугольника въ L, или на сторонѣ BC въ M, или внѣ треугольника въ N. Разсмотримъ отдѣльно эти три случая.

1-й случай: Треугольникъ $A_1B_1C_1$ при наложеніи принимаетъ положеніе ALC.

По § 14. имѣемъ

$$AB + BC > AL + LC;$$

по положенію же

$$AB = AL,$$

слѣдов., вычитая, находимъ $BC > LC$.

2-й случай. Треугольникъ $A_1B_1C_1$ при наложеніи принимаетъ положеніе AMC. Въ этомъ случаѣ само собою ясно, что $BC > MC$.

3-й случай. Треугольникъ $A_1B_1C_1$ при наложеніи принимаетъ положеніе ANC.

Изъ треугольниковъ AMB и CMN имѣемъ

$$AM + MB > AB \text{ и } NM + MC > NC;$$

сложивъ эти неравенства, и замѣтивъ, что линіи BM и MC составляютъ одну линію BC, а линіи AM и MN одну линію AN, находимъ:

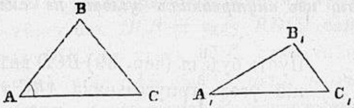
$$AN + BC > AB + NC.$$

Но по положенію $AN=AB$, слѣдов., вычитая, находимъ $BC > NC$.

Итакъ, во всѣхъ возможныхъ случаяхъ, сторона BC больше стороны B_1C_1.

Обратная теорема. Если двѣ стороны одного треугольника соотвѣтственно равны двумъ сторонамъ другаго, но третьи стороны не равны, то противъ бо́льшей стороны лежитъ и бо́льшій уголъ.

Пусть будутъ (черт. 38) $AB=A_1B_1$; $AC=A_1C_1$ и $BC > B_1C_1$; требуется доказать, что уголъ $A >$ угла A_1.



Черт. 38.

Доказ. Уголъ A не можетъ быть меньше угла A_1, потому что иначе, по предъидущей теоремѣ, сторона BC была бы меньше стороны B_1C_1, что противно положенію; но уголъ A не можетъ также быть равенъ углу A_1, потому что иначе треугольники CAB и $C_1A_1B_1$, имѣя по двѣ стороны и углу между ними равными, по § 15, были бы равны и $BC = B_1C_1$, что также противно положенію. Итакъ уголъ $A >$ угла A_1, что и требовалось доказать.

§ 20. Теорема: *Если три стороны одного триугольника соотвѣтственно равны тремъ сторонамъ другаго, то и триугольники равны.*

Черт. 36.

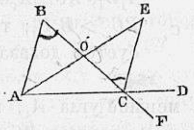
Пусть будутъ (черт. 36) $AB=A_1B_1$; $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$; требуется доказать, что $\triangle ABC$ равенъ $\triangle A_1B_1C_1$.

Доказ. Два соотвѣтствующихъ угла, напр. A и A_1, лежащіе противъ равныхъ сторонъ, по предъидущему §, не могутъ быть различны, слѣдов. должны быть равны между собою, но въ такомъ случаѣ триугольники ABC и $A_1B_1C_1$, имѣя двѣ стороны и уголъ между ними равными, по § 15, равны между собою.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что три стороны опредѣляютъ вполнѣ триугольникъ, потому что изъ этихъ трехъ частей можетъ быть составленъ только одинъ триугольникъ.

§ 21. Теорема. *Во всякомъ триугольникѣ внѣшній уголъ болѣе каждаго изъ внутреннихъ угловъ, не смежнаго съ нимъ.*

Пусть будетъ (чер. 39) BCD внѣшній уголъ триугольника ABC требуется доказ., что уголъ BCD больше, какъ угла ABC, такъ и угла CAB.

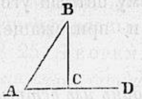


Черт 39.

Доказ. Пусть будетъ O средина стороны BC; проведемъ чрезъ точки A и O прямую и возьмемъ $OE=AO$, наконецъ соединимъ точки E и C. Въ триугольникахъ AOB и COE углы BOA и EOC равны, какъ вертикальные (§ 7); кромѣ того, по построенію, $BO=OC$ и $AO=OE$. Слѣдов. эти триугольники, по § 15, равны, и потому уголъ OCE равенъ углу ABO, слѣдов. уголъ BCD больше угла ABC.

Далѣе замѣтимъ, что если вмѣсто AC продолжимъ сторону BC, то по предъидущему докажемъ, что внѣшній уголъ ACF больше внутренняго угла BAC; но углы BCD и ACF равны между собою, какъ углы вертикальные (§ 7), слѣдов. уголъ BCD также больше угла BAC.

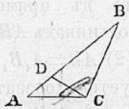
Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что *во всякомъ прямоугольномъ триугольникѣ оба угла, прилежащіе гипотенузѣ, острые.* Въ самомъ дѣлѣ, продолживъ въ прямоугольномъ триугольникѣ ABC (черт. 42) катетъ AC, находимъ, по предъидущему, что углы CAB и ABC меньше внѣшняго угла BCD, т. е. меньше прямаго угла.



Черт. 40.

§ 22. Теорема. *Во всякомъ триугольникѣ противъ большей стороны лежитъ и бóльшій уголъ.*

Пусть будетъ (черт. 41) $AB > BC$; требуется доказать, что уголъ $ACB >$ угла BAC.



Чарт, 41.

Доказ. Отложимъ на бóльшой сторонѣ AB часть $BD=BC$, и соединимъ точки D и C. Въ равнобедренномъ триугольникѣ DBC, по § 16, уголъ $DCB =$ углу BDC; слѣдов. уголъ $ACB >$ угла BDC; но уголъ BDC, какъ внѣшній уголъ $\triangle ADC$, больше угла CAD (§ 21); слѣд. уголъ $ACB >$ угла CAB.

Обратная теорема. Во всякомъ триугольникѣ противъ бóльшаго угла лежитъ и бóльшая сторона.

Пусть будетъ (черт. 41) уголъ $ACB >$ угла BAC; требуется доказать, что $AB > BC$.

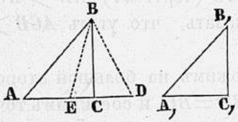
Доказ. Очевидно, что AB не можетъ равняться BC, потому что иначе ΔABC былъ бы равнобедренный и уголъ ACB равнялся бы углу BAC (§ 16), что противно положенію. Но AB также не можетъ быть менѣе BC, потому что иначе, по преддъиущему, уголъ ACB былъ бы менѣе угла BAC, что также противно положенію. Слѣдов. сторона AB должна быть больше стороны BC, что и требовалось доказать.

§ 23. Такъ какъ всѣ прямоугольные треугольники имѣютъ по одному равному углу — именно по прямому углу, то два прямоугольныхъ треугольника равны:

1) Когда катеты одного соотвѣтственно равны катетамъ другаго (§ 15);

2) Когда катетъ и прилежащій къ нему острый уголъ однаго соотвѣтственно равны катету и прилежащему углу другаго (§ 17).

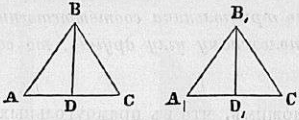
§ 24. Теорема. *Если гипотенуза и одинъ изъ острыхъ угловъ одного прямоугольнаго треугольника соотвѣтственно равны гипотенузѣ и острому углу другаго, то самые треугольники равны.*



Черт. 42.

Положимъ, что въ прямоугольныхъ треугольникахъ ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 42) $AB=A_1B_1$ и $\angle A=\angle A_1$; требуется доказать что ΔABC равенъ $\Delta A_1B_1C_1$.

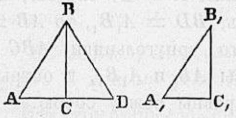
Доказ. Наложимъ $\Delta A_1B_1C_1$ на ΔABC такъ, чтобы сторона A_1B_1 совпала съ равной ей стороною AB; вслѣдствіе равенства угловъ A и A_1, сторона A_1C_1 пойдетъ по направленію AC; сторона же B_1C_1, при этомъ, не можетъ лежать внутри треугольника, какъ линія BE, потому что, въ такомъ случаѣ, уголъ AEB, какъ внѣшній уголъ, былъ бы болѣе прямаго угла ECB (§ 21), что противно положенію; но сторона B_1C_1 также не можетъ лежать внѣ треугольника, какъ линія BD, потому что, въ такомъ случаѣ, уголъ BDC былъ бы меньше внѣшняго угла ACB, т. е. меньше прямаго, что также противно положенію. Слѣдов. сторона B_1C_1 пойдетъ по сторонѣ BC, и два треугольника совпадутъ, что и требовалось доказать.



Черт. 43.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что *въ двухъ равныхъ треугольникахъ ABCи$A_1B_1C_1$* (черт. 43) *высоты BD и B_1D_1 также равны,* потому что прямоугольные треугольники ABD и $A_1B_1D_1$, въ которыхъ, уголъ $A=$углу A_1 и $AB=A_1B_1$, по предъидущему, равны между собою.

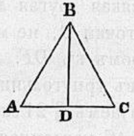
§ 25. Теорема. *Если гипотенуза и катетъ одного прямоугольнаго треугольника соотвѣтственно равны гипотенузѣ и катету другаго, то и самые треугольники равны.*



Черв. 44.

. Положимъ, что въ прямоугольныхъ треугольникахъ ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 44) $AB=A_1B_1$ и $BC=B_1C_1$; требуется доказать, что ΔABC равенъ $\Delta A_1B_1C_1$.

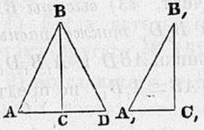
Доказ. Приложимъ $\Delta A_1B_1C_1$ къ ΔABC такъ, чтобы сторона B_1C_1 совпала съ равной ей стороною BC и $\Delta A_1B_1C_1$ принялъ положеніе BCD; линія CD будетъ продолженіемъ линіи AC, потому что уголъ BCD, по положенію, равенъ прямому (§ 6). Треугольникъ ABD, въ которомъ, по положенію, $AB=BD$, будетъ равнобедренный; слѣд., по § 16, уголъ $A=$углу D, и такъ какъ $\angle D = \angle A_1$, то $\angle A = \angle A_1$. Изъ этого слѣдуетъ, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, имѣя по равной гипотенузѣ и по равному острому углу, равны.



Черт. 45.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что *въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC* (чер. 45) *перпендикуляръ BD, опущенный изъ вершины на основаніе, дѣлитъ основаніе и уголъ при вершинѣ пополамъ,* потому что прямоугольные треугольники ABD и CBD, имѣя равныя гипотенузы AB и BC и общій катетъ BD, по предъидущему, равны между собою.

§ 26. **Теорема.** *Если катетъ и противуположный уголъ одного прямоугольнаго треугольника соотвѣтственно равны катету и противуположному углу другаго, то самые треугольники равны.*



Черт. 46.

Положимъ, что въ прямоугольныхъ треугольникахъ ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 46) $BC = B_1C_1$ и $A = A_1$; требуется доказать, что $\triangle ABC$ равенъ $\triangle A_1B_1C_1$.

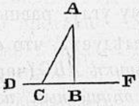
Доказ. Приложимъ $\triangle A_1B_1C_1$ къ $\triangle ABC$, какъ въ предъидущемъ §, т. е. такъ, чтобы онъ принялъ положеніе BCD. Въ $\triangle ABD$, по положенію, $A = D$, слѣдов., по § 18, $AB = BD$; но такъ какъ, $BD = A_1B_1$, то $AB = A_1B_1$. Изъ этого слѣдуетъ, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, въ которыхъ гипотенузы AB и A_1B_1, и острые углы A и A_1 равны, по § 24, равны между собою.

Изъ свойства прямоугольныхъ треугольниковъ легко выводятся *свойства перпендикуляра относительно наклонныхъ линій.*

Свойства перпендикуляра и наклонныхъ.

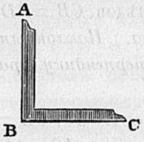
§ 27. **Теорема.** *Изъ данной точки можно опустить на прямую линію только одинъ перпендикуляръ.*

Положимъ, что изъ точки A (черт. 47) опущенъ перпендикуляръ AB на линію DF; требуется доказать, что всякая другая линія AC, проведенная изъ точки A, не можетъ быть перпендикуляромъ къ DF.

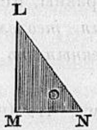


Черт. 47.

Доказ. Замѣтивъ, что въ треугольникѣ ABC уголъ B, по положенію, прямой, заключаемъ (§ 21 сл.), что уголъ ACB острый, и слѣдов. линія AC наклонная.



Черт. 48.



Черт. 49.

Замѣч. Для проведенія перпендикуляра употребляется или снарядъ ABC (черт. 48), состоящій изъ двухъ линеекъ, образующихъ прямой уголъ, или снарядъ LMN, (черт. 49) представляющій деревянную дощечку въ видѣ прямоугольнаго треугольника.

§ 28. **Теорема.** *Перпендикуляръ короче всякой наклонной.*

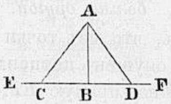
Положимъ, что AB (черт. 47) есть перпендикуляръ, опущенный изъ точки A на прямую DF, и AC какая нибудь наклонная, проведенная изъ точки A; требуется доказать, что $AC > AB$.

Доказ. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ACB, по § 21, уголъ C меньше угла B, слѣдов. $AC > AB$ (§ 22).

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ каждый изъ катетовъ меньше гипотенузы.

Такъ какъ перпендикуляръ есть кратчайшее разстояніе точки отъ прямой, то разстояніе точки отъ прямой опредѣляется длиною перпендикуляра, опущеннаго изъ точки на прямую.

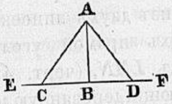
§ 29. **Теорема.** *Равныя наклонныя равно удалены отъ перпендикуляра.*



Черт. 50.

Положимъ, что AB (черт. 50) есть перпендикуляръ, опущенный изъ точки A на прямую EF, и что наклонныя AC и AD равны между собою, — требуется доказать, что $CB = BD$.

Доказ. Такъ какъ прямоугольные треугольники ABC и ABD имѣютъ общій катетъ AB и равныя гипотенузы AC и AD, то, по § 25, эти триугольники равны, и слѣдов. $CB=BD$.



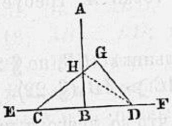
Черт. 50.

Обратная теорема. Наклонныя, равно удаленныя отъ перпендикуляра, равны.

Положимъ, что (черт. 50) $CB = BD$, требуется доказ. что $AC=AD$.

Доказ. Такъ какъ прямоугольные триугольники ABC и ABD имѣютъ общій катетъ AB, и другіе катеты CB и BD, по положенію, равны, то эти триугольники, по § 23, равны, и слѣдов. $AC = AD$.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что *наклонныя* GC и GD (черт. 51), *равно удаленныя отъ перпендикуляра* AB, *но проведенныя отъ точки* G, *лежащей внѣ перпендикуляра, не равны между собою.* Въ самомъ дѣлѣ, соединивъ точки H и D, находимъ изъ триугольника GHD:



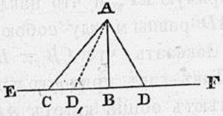
Чеут. 51.

$$GH + HD > GD.$$

Но наклонныя HC и DH, по положенію, равно удаленны отъ перпендикуляра, слѣдов., по предъидущему, онѣ равны между собою; поэтому: $GH + HC > GD$, или $GC > GD$.

Изъ этого же предложенія слѣдуетъ, что перпендикуляръ, проведенный чрезъ средину линіи, есть геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ обоихъ концевъ ея.

§ 30. Теорема. *Изъ двухъ наклонныхъ, та, которая дальше отстоитъ отъ перпендикуляра, больше другой.*



Черт. 52.

Положимъ, что изъ точки A (черт. 52) опущенъ перпендикуляръ AB на прямую EF, и проведены двѣ наклонныя AD и AC такъ, что $BC > BD$; требуется доказать, что $AC>AD$.

Доказ. Отложивъ $BD_1 = BD$, и соединивъ точки A

и D_1, находимъ $AD_1=AD$ (§ 29). Но уголъ ACB меньше прямаго, какъ острый уголъ прямоугольнаго триугольника CAB, а уголъ AD_1C больше прямаго, какъ внѣшній уголъ прямоугольнаго триугольника AD_1B; слѣдов. въ триугольникѣ ACD_1 уголъ AD_1C больше угла ACD_1, и потому, по § 22, $AC > AD_1$ или $AC > AD$.

Обратная теорема. Изъ двухъ наклонныхъ, та, которая больше, отстоитъ отъ перпендикуляра дальше.

Положимъ, что $AC>AD$ (черт. 52); требуется доказать, что $CB > BD$.

Доказ. Очевидно, что CB не можетъ равняться BD, потому что тогда, по § 29, $CA=AD$, что противно положенію; но CB не можетъ быть и меньше BD, потому что тогда, по предъидущему, AC была бы меньше AD, что также противно положенію; слѣд. BC будетъ больше BD.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что изъ данной точки можно провести не болѣе двухъ наклонныхъ, равныхъ между собою.

Задачи.

1 Начертить прямую, равную суммѣ нѣсколькихъ линій.

2. Начертить прямую, равную данной линіи, повторенной нѣсколько разъ.

3. Начертить прямую, равную разности двухъ линій AB и MN.

4. Раздѣлить прямую AB пополамъ.

5 Раздѣлить нрямую AB на 4, 8, 16 и т. д. равныхъ частей.

6. По данной суммѣ s и разности d двухъ прямыхъ, опредѣлить эти прямыя.

7. Изъ средины линіи AB возставить къ ней перпендикуляръ.

8. Чрезъ точку O прямой AB провести къ ней перпендикуляръ.

9. Изъ точки M опустить перпендикуляръ на прямую AB.

10. Измѣрить разстояніе точки M отъ прямой AB.

11. Найти геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ двухъ точекъ A и B.

12. При точкѣ A прямой AB построить уголъ, равный данному углу LOM.

13. Составить уголъ, равный суммѣ нѣсколькихъ угловъ.

14. Составить уголъ, равный данному углу, повторенному нѣсколько разъ.

15. Составить уголъ, равный разности двухъ угловъ.

16. Раздѣлить уголъ BAC пополамъ.

17. Раздѣлить уголъ BAC на 4, 8, 16 и т. д. равныхъ частей.

18. По данной суммѣ и разности двухъ угловъ опредѣлить эти углы.

19. Провести чрезъ точку A прямую, проходящую между точками B и C на равномъ разстояніи отъ нихъ.

20. Даны двѣ точки L и M: найти на прямой AB такую точку, чтобы прямыя, проведенныя изъ этой точки къ точкамъ L и M, составили съ прямой AB равные углы.

21. Провести чрезъ точку A прямую, составляющую одинакіе углы съ сторонами даннаго угла LOM.

22. На прямой AB найти точку на равномъ разстояніи отъ двухъ данныхъ точекъ M и N.

23. Найти геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ двухъ прямыхъ AB и CD, пересѣкающихся въ точкѣ O.

24. Найти на прямой AB точку, равно отстоящую отъ двухъ пересѣкающихся линій LM и PQ.

25. Построить треугольникъ по тремъ даннымъ сторонамъ его.

26. Построить треугольникъ по даннымъ двумъ сторонамъ и по углу, заключающемуся между ними.

27. Построить треугольникъ по данной сторонѣ и двумъ прилежащимъ угламъ.

28. Построить треугольникъ по даннымъ двумъ сторонамъ и по углу, противуположному одной изъ нихъ.

29. Построить прямоугольный треугольникъ по данной гипотенузѣ и данному катету.

30. Построить прямоугольный треугольникъ по данной гипотенузѣ и данному острому углу.

31. Построить треугольникъ по данной сторонѣ, по прилежащему углу и разности двухъ другихъ сторонъ.

32. Построить треугольникъ по данной сторонѣ, по прилежащему углу и суммѣ двухъ другихъ сторонъ.

33. На прямой AB найти такую точку, чтобы сумма разстояній ея отъ двухъ данныхъ точекъ L и M, лежащихъ по одной сторонѣ прямой AB, была бы наименьшая.

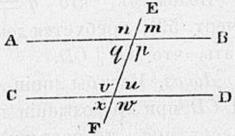
ГЛАВА III.

Параллельныя линіи.

Теорія параллельныхъ линій; нѣкоторыя слѣдствія ея. О параллелограммахъ и трапеціи. Задачи.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЯ ЛИНІИ.

§ 31. Двѣ линіи AB и CD (черт. 53), лежащія въ одной плоскости, и при продолженіи въ ту и другую сторону не встрѣчающіяся, называются *параллельными*.



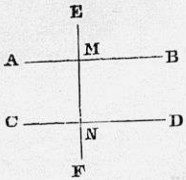
Черт. 53.

Если пересѣчемъ параллельныя линіи AB и CD косвенною линіею EF, называемою *пересѣкающею*, то образуются восемь угловъ m, n, p, q, u, v, w, x, изъ которыхъ m, n, w, x называются *внѣшними*, а p, q, u, v — *внутренними* углами. Разсматривая углы, по парно, мы называемъ два угла, лежащіе по одной сторонѣ пересѣкающей, какъ напр. углы m и w или q и x — *односторонними*, углы же, лежащіе по разнымъ сторонамъ пересѣкающей, какъ напр. углы p и v или n и w — *накрестъ лежащими*.

Два одностороннихъ угла, изъ которыхъ одинъ внутренній, а другой внѣшній, какъ напр. углы m и u, называются *соотвѣтственными*.

Для обозначенія параллельности двухъ линій употребляется иногда знакъ $\|$. На пр. $AB \parallel CD$ значитъ, что линіи AB и CD параллельны между собою.

§ 32. Теорема. *Двѣ линіи, перпендикулярныя къ третьей линіи, параллельны между собою.*

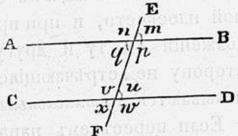


Черт. 54.

Положимъ, что линіи AB и CD (черт. 54) перпендикулярны къ линіи EF; требуется доказать, что линіи AB и CD параллельны.

Доказ. Если бы линіи AB и CD при продолженіи пересѣкались, то изъ точки ихъ пересѣченія были бы опущены два перпендикуляра на линію EF, что противно § 27.

§ 33. Теорема. *Двѣ линіи, пересѣченныя третьей линіей, параллельны, когда внутренніе на крестъ лежащіе углы равны.*



Черт. 53.

Положимъ, что $q = u$ (черт. 53); требуется доказать, что $AB \parallel CD$.

Доказ. Еслибы линіи AB и CD при продолженіи пересѣкались, то составился бы треугольникъ, для котораго одинъ изъ угловъ q и u былъ бы внѣшнимъ, другой внутреннимъ угломъ; слѣд., при пересѣченіи линіи AB и CD, внѣшній уголъ треугольника равнялся бы внутреннему углу, что противно § 21.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ:

1. *Линіи AB и CD параллельны, когда внѣшніе на крестъ лежащіе углы, напр. m и x, равны,* потому что изъ $m = x$ слѣдуетъ $q = u$.

2. *Линіи AB и CD параллельны, когда соотвѣтственные углы, напр. m и u, равны,* потому что изъ $m = u$ слѣдуетъ $q = u$.

3. *Линіи AB и CD параллельны, когда сумма двухъ внутреннихъ одностороннихъ угловъ, напр. p и u, равна двумъ прямымъ,* потому что изъ $p + u = 2d$ и $p + q = 2d$ слѣдуетъ $p + u = p + q$, или $u = q$.

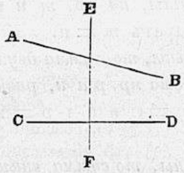
4. *Линіи AB и CD параллельны, когда сумма двухъ внѣшнихъ одностороннихъ угловъ напр. m и w равна двумъ прямымъ,* потому что изъ $m + w = 2d$ и $w + u = 2d$ слѣдуетъ $u = m$.

5. Если изъ восьми угловъ m, n, p, q, u, v, w, x составимъ слѣдующія равенства:

$q = u$; $m = x$; $p = v$; $n = w$;
$q + v = 2d$; $m + v = 2d$; $p + u = 2d$; $n + x = 2d$;
$q = x$; $m = u$; $p = w$; $n = v$;
$q + w = 2d$; $m + v = 2d$; $p + x = 2d$; $n + u = 2d$;

то очевидно, что каждое изъ нихъ обусловливаетъ всѣ остальныя; слѣдов. линіи AB и CD параллельны, когда одно изъ этихъ равенствъ существуетъ.

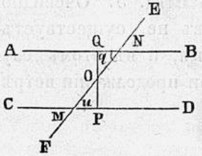
§ 34. Аксiома. *Двѣ линіи AB* и *CD* (черт. 55), *изъ которыхъ одна CD перпендикулярна къ пересѣкающей EF, а другая AB составляетъ съ нею острый или тупой уголъ, при продолженіи пересѣкаются.*



Черт. 55.

§ 35. Теорема. *Параллельныя линіи съ пересѣкающею образуютъ внутренніе, на крестъ лежащіе, углы равные.*

Положимъ, что линіи AB и CD (черт. 56) параллельны и пересѣчены линіею EF; требуется доказ., что $q = u$.

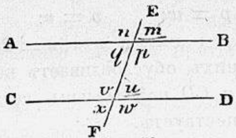


Черт. 56.

Доказ. Пусть будетъ O средина линіи MN; изъ точки O опускаемъ перпендикуляръ на CD и продолжаемъ его до пересѣченія съ прямой AB. Линія PQ, перпендикулярная къ CD, будетъ перпендикулярна и къ AB, иначе линіи CD и AB, по § 34, при продолженіи пересѣкались бы. Слѣд. треугольники MOP и QON прямоугольные; а такъ какъ кромѣ того, по построенію, $MO = ON$, и уголъ QON = углу MOP, какъ углы вертикальные, то эти треугольники, по § 24, равны, и потому $\angle q = \angle u$.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что *чрезъ данную точку можно провести только одну линію параллельную данной прямой.*

Изъ того же предложенія слѣдуетъ:



Черт. 53.

1. *Если линіи AB и CD параллельны, то внѣшніе на крестъ лежащіе углы, на пр. m и x, равны,* потому что изъ $q = u$ слѣдуетъ $m = x$.

2. *Если линіи AB и CD параллельны, то соотвѣтственные углы, на пр. m и u, равны,* потому что изъ $q = u$ слѣдуетъ $m = u$.

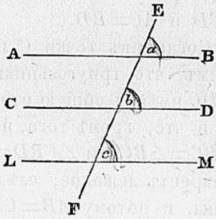
3. *Если линіи AB и CD параллельны, то сумма двухъ внутреннихъ одностороннихъ угловъ, на пр. p и u, равна двумъ прямымъ,* потому что изъ $q = u$ и $q + p = 2d$ слѣдуетъ $u + p = 2d$.

4. *Если линіи AB и CD параллельны, то сумма внѣшнихъ одностороннихъ угловъ, на пр. m и w, равна двумъ прямымъ,* потому что изъ $m = x$ и $x + w = 2d$ слѣдуетъ $m + w = 2d$.

5. Вообще, если линіи AB и CD параллельны, то существуютъ всѣ 12 равенствъ § 33 слѣд. 5. Очевидно, что если одно изъ этихъ равенствъ не существуетъ, то не существуютъ и всѣ остальныя, и въ этомъ случаѣ линіи не параллельны, т. е. при продолженіи встрѣтаются. *)

Нѣкоторыя слѣдствія изъ теоріи параллельныхъ линій.

§ 36. Теорема. *Двѣ линіи параллельныя третьей, параллельны между собою.*



Черт. 57.

Положимъ, что (черт. 57) $AB \parallel LM$ и $CD \parallel LM$; требуется доказать, что $AB \parallel CD$.

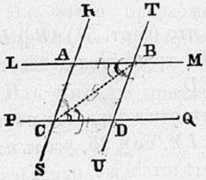
Доказ. Вслѣдствіе параллельности линій AB и LM, по § 35, уголъ a = углу c; вслѣдствіе же параллельности линій CD и LM уголъ a = углу c; слѣдов. $\angle a = \angle b$, и потому, по § 33, линіи AB и CD параллельны.

---

*) *Замѣчаніе.* Предложеніе: *если двѣ линіи пересѣчены косвенно третьею, и сумма двухъ внутреннихъ одностороннихъ угловъ не равна 2d, то линіи при продолженіи встрѣчаются,* принято Эвклидомъ какъ истина сама собою очевидная, и составляетъ въ его Геометріи, извѣстную въ наукѣ, *одинадцатую аксіому.* Извѣстность, которою пользуется это предложеніе между Геометрами, происходитъ отъ того, что противъ его очевидности сдѣлано было много возраженій. Но всѣ попытки Геометровъ древняго и новаго времени, строго доказать это предложеніе, не привели ни къ какому удовлетворительному результату. Въ энциклопедіи Grubera, въ статьѣ: *параллельныя линіи,* находится подробное изложеніе разныхъ мнѣній объ этомъ спорномъ предметѣ, вмѣстѣ съ указаніемъ различныхъ сочиненій о параллельныхъ линіяхъ, число которыхъ простирается до 100. Обстоятельное изложеніе разныхъ теорій параллелей находимъ мы также въ сочиненіи Академика В. Я. Буняковскаго *о параллельныхъ линіяхъ* (1853).

Изъ всѣхъ неудачныхъ попытокъ основать теорію параллельныхъ линій на строго доказанной истинѣ, мы выводимъ заключеніе, что эта теорія требуетъ особаго основнаго положенія, которое должно быть допущено безъ доказательства, какъ истина сама собою очевидная. Затрудненіе можетъ заключаться только въ выборѣ предложенія, столь очевиднаго, чтобы оно могло быть допущено безъ доказательства. Предложеніе, что *двѣ линіи, изъ которыхъ одна перпендикулярна, а другая не перпендикулярна къ пересѣкающей, при продолженіи встрѣтятся,* принятое, въ § 34, какъ аксіома въ основаніи теоріи параллельныхъ линій, очевидно, есть ничто иное, какъ простѣйшее выраженіе одинадцатой аксіомы Эвклида.

§ 37. ТЕОРЕМА *Отрѣзки параллельныхъ между параллельными равны.*



Черт. 58.

Положимъ, что (черт. 58) $LM \parallel PQ$ и $RS \parallel TU$; требуется доказать, что $AB=CD$ и $AC=BD$.

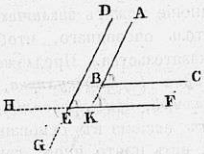
Доказ. Соединивъ точки C и B, замѣтимъ, что треугольники ABC и BDC имѣютъ общую сторону CB, и что, кромѣ того, по § 35, $\angle ABC=\angle BCD$ и $\angle CBD=\angle ACB$, какъ углы внутренніе накрестъ лежащіе; слѣд. эти треугольники, по § 17, равны, и потому $AB=CD$ и $AC=BD$.

Обратная теорема. Если $AB=CD$ и $AC=BD$, то $LM \parallel PQ$ и $RS \parallel TU$.

Доказ. Въ самомъ дѣлѣ, треугольники ABC и BDC имѣютъ общую сторону CB и кромѣ того, по положенію, $AB=CD$ и $AC=BD$; слѣд. эти треугольники, по § 20, равны, и потому $\angle ABC=\angle BCD$ и $\angle CBD=\angle ACB$. Вслѣдствіе этого, по § 33, $LM \parallel PQ$ и $RS \parallel TU$.

Предполагая, что линіи LM и PQ перпендикулярны къ линіямъ RS и TU, находимъ изъ предъидущихъ предложеній, что параллельныя линіи во всѣхъ точкахъ отстоятъ другъ отъ друга на равномъ разстояніи, и наоборотъ, линіи, во всѣхъ точкахъ равно отстоящія другъ отъ друга, — параллельны между собою.

§ 38. ТЕОРЕМА. *Если углы съ параллельными сторонами обращены своими отверстіями въ одну сторону или въ противуположныя стороны, то они равны.*

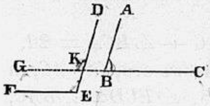


Черт. 59.

Положимъ, что (черт. 59) $AB \parallel DE$ и $BC \parallel EF$; требуется доказать, что углы DEF и ABC, обращенные своими отверстіями въ одну сторону, равны.

Доказ. Продолживъ сторону AB до пересѣченія съ EF, находимъ, по § 35, $\angle ABC=\angle AKF$ и $\angle AKF=\angle DEF$, какъ углы соотвѣтственные; слѣд. $\angle ABC=\angle DEF$.

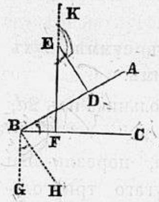
Продолживъ стороны DE и FE, находимъ что $\angle ABC = \angle HEG$, т. е. углы ABC и HEG, съ параллельными сторонами, но обращенные въ противуположныя стороны, также равны.



Черт. 60.

Если же углы, съ параллельными сторонами, обращены въ разныя, но не прямо противуположныя стороны, какъ углы ABC и DEF (черт. 60), то сумма ихъ равна двумъ прямымъ. Въ самомъ дѣлѣ, продолживъ сторону BC, находимъ, по § 35: $\angle ABC + \angle DKG = 2d$ и $\angle DKG = \angle DEF$, слѣд. $\angle ABC + \angle DEF = 2d$.

§ 39. ТЕОРЕМА. *Если стороны однаго угла перпендикулярны къ сторонамъ другаго угла, то эти углы равны или составляютъ 2d.*



Черт. 61.

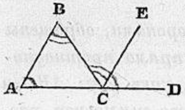
Положимъ, что стороны угла DEF (черт. 61) перпендикулярны къ сторонамъ угла ABC; требуется доказать, что $\angle DEF = \angle ABC$.

Доказ. Проведя $BH \parallel ED$ и $BG \parallel EF$, находимъ, по предыдущему §, $\angle HBG = \angle DEF$, и вслѣдствіе параллельности линій, по § 35, $\angle HBD = \angle EDA = d$ и $\angle GBC = \angle CFE = d$. Если же изъ угла GBA вычтемъ прямой уголъ GBC, то получимъ уголъ ABC; если же изъ того же угла вычтемъ прямой уголъ HBD, то получимъ уголъ GBH; слѣдов. $\angle ABC = \angle GBH$, и потому $\angle ABC = \angle DEF$.

Очевидно, что уголъ KED, стороны котораго также перпендикулярны къ сторонамъ угла ABC, составляетъ вмѣстѣ съ нимъ $2d$.

Когда углы, которыхъ стороны взаимно перпендикулярны, или оба острые или оба тупые, то они равны между собою; когда же одинъ острый а другой тупой, то они вмѣстѣ составляютъ $2d$.

§ 40. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ треугольникѣ сумма его угловъ равняется двумъ прямымъ.* +1°-181°



Черт. 62.

Пусть будетъ ABC (черт. 62) какой нибудь треугольникъ; требуется доказать, что

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = 2d.$$

Доказ. Продолживъ сторону AC, и проведя $CE \parallel AB$, находимъ, по § 35, $\angle ECD = \angle BAC$, какъ углы соотвѣтственные, и $\angle BCE = \angle ABC$, какъ внутренніе на крестъ лежащіе углы; слѣдов.

$$BAC + ABC + BCA = ECD + BCE + ACB \cancel{+ 2d}.$$

Но такъ какъ, по § 5, $ECD + BCE + ACB = 2d$, то $BAC + ABC + BCA = 2d$, что и требовалось доказать.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ:

1. Внѣшній уголъ треугольника равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ угловъ не смежныхъ съ нимъ.

2. Вычитая сумму двухъ угловъ треугольника изъ $2d$, получаемъ третій уголъ его.

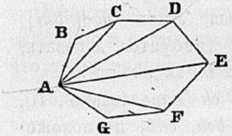
3. Если два угла однаго треугольника, порознь или вмѣстѣ взятые, равны двумъ угламъ другаго треугольника, то и третій уголъ перваго равенъ третьему углу втораго.

4. Сумма двухъ острыхъ угловъ прямоугольнаго треугольника равна прямому углу.

5. Въ равностороннемъ треугольникѣ каждый уголъ равняется $^1/_3\ d$.

6. Въ треугольникѣ не можетъ быть болѣе однаго прямаго или тупаго угла.

§ 41. ТЕОРЕМА. *Сумма угловъ всякаго многоугольника равняется двумъ прямымъ повтореннымъ столько разъ, сколько многоугольникъ имѣетъ сторонъ безъ двухъ.*



Черт. 24.

Положимъ что многоугольникъ $ABCDEFG$ (черт. 24) имѣетъ n сторонъ; требуется доказать, что сумма его угловъ равна $2d\,(n-2)$.

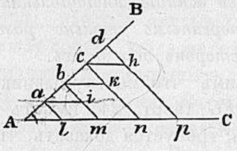
Доказ. Такъ какъ діагонали, выходящія изъ вершины какого-нибудь угла A многоугольника, раздѣляютъ его на $n-2$ треугольниковъ (§ 10), а сумма угловъ всякаго треугольника, по § 40, равна $2d$, то сумма угловъ многоугольника равняется $2d\ (n-2)$.

Представивъ выраженіе $2d\ (n-2)$ въ видѣ $2dn-4d$, заключаемъ, что сумма угловъ всякаго многоугольника равняется также *двумъ прямымъ, умноженнымъ на число сторонъ многоугольника безъ четырехъ прямыхъ.* Такъ напр. сумма угловъ всякаго четыреугольника равна $4d$, всякаго пятиугольника — $6d$ и т. д.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что во всякомъ многоугольникѣ *сумма внѣшнихъ угловъ, происшедшихъ отъ продолженія всѣхъ сторонъ его по одному направленію, равняется $4d$.*

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ каждый внѣшній уголъ, вмѣстѣ съ соотвѣтственнымъ ему внутреннимъ угломъ, составляетъ $2d$, то сумма всѣхъ внѣшнихъ и внутреннихъ угловъ вмѣстѣ равняется $2dn$; а такъ какъ, по предъидущему, сумма внутреннихъ угловъ равна $2dn - 4d$, то сумма внѣшнихъ угловъ будетъ $2dn - (2dn - 4d)$ т. е. $2dn - 2dn + 4d$ или $4d$.

§ 42. ТЕОРЕМА. *Если раздѣлимъ одну сторону угла на равныя части, и чрезъ точки дѣленія проведемъ параллельныя линіи, то и другая сторона угла раздѣлится на равныя части.*



Черт. 63.

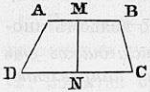
Положимъ, что сторона AB (черт. 63) угла BAC раздѣлена на равныя части: $Aa = ab = bc = cd$, и что проведены параллельныя линіи $al \parallel bm \parallel cn \parallel dp$; требуется доказать, что $Al = lm = mn = np$.

Доказ. Проведемъ линіи ai, bk, ch параллельно AC, тогда въ треугольникахъ Aal, abi, bck, cdh, по положенію, $Aa = ab = bc = cd$, и кромѣ того углы прилежащіе этимъ линіямъ, какъ углы соотвѣтственные, по § 35, равны; слѣдов. эти треугольники, по § 17, равны между собою, и потому $Al = ai = bk = ch$, а вслѣдствіе этого, по § 37:

$$Al = lm = mn = np.$$

Параллелограммы и трапеціи.

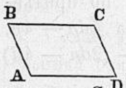
§ 43. Четыреугольникъ $ABCD$ (черт. 64), въ которомъ двѣ стороны AB и CD параллельны, двѣ другія же стороны AD и BC не параллельны, называется *трапеціею*. Разстояніе двухъ параллельныхъ сторонъ, т. е. перпендикуляръ MN, опущенный изъ какой-нибудь точки одной изъ параллельныхъ сторонъ на другую, называется *высотою* трапеціи.



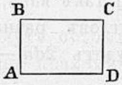
Черт. 64.

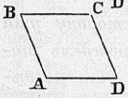
Четыреугольникъ $ABCD$ (черт. 65), въ которомъ противуположныя стороны параллельны, называется *параллелограммомъ*. Одна изъ сторонъ параллелограмма, напр. AD называется *основаніемъ*, а перпендикуляръ, опущенный на основаніе изъ какой-нибудь точки противуположной стороны—*высотою* параллелограмма.

Черт. 65.

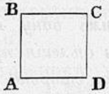


Черт, 66.





Черт. 67.



Черт. 68.

Параллелограммъ $ABCD$ (черт. 66), въ которомъ всѣ углы прямые, называются *прямоугольникомъ*. Одна изъ сторонъ прямоугольника, напр. AD, есть основаніе, а другая AB высота его.

Очевидно, что прямоугольники, имѣющіе одинакое основаніе и одинакую высоту, равны между собою, потому что такіе прямоугольники при наложеніи совпадаютъ.

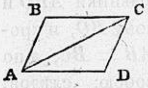
Параллелограммъ $ABCD$ (черт. 67), въ которомъ всѣ четыре стороны равны, называется *ромбомъ*.

Прямоугольникъ $ABCD$ (черт. 68), въ которомъ всѣ четыре стороны равны, называется *квадратомъ*.

Во всякомъ параллелограммѣ сумма угловъ, прилежащихъ къ одной изъ его сторонъ, напр. углы A и D (черт. 65), по § 35, равна двумъ прямымъ, а противуположные углы, напр. углы A и C, по § 38, равны между собою.

Противуположныя стороны параллолограмма, по § 37, равны, и на оборотъ, четыреугольникъ, въ которомъ противуположныя стороны равны, по § 37, есть параллелограммъ.

§ 44. ТЕОРЕМА. *Всякій параллелограммъ діагональю дѣлится на два равныхъ треугольника.*



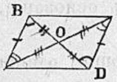
Черт. 69.

Проведемъ въ параллелограммѣ $ABCD$ (черт. 69) діагональ AC, требуется доказать, что треугольники ABC и ADC равны между собою.

Доказ. Треугольники ABC и ACD имѣютъ общую сторону AC, и кромѣ того, по § 43, $AB = CD$и $BC = AD$; слѣдов. эти треугольники равны (§ 20).

Очевидно, что прямоугольникъ, ромбъ и квадратъ, какъ частные случаи параллелограмма, дѣлятся діагональю также на два равныхъ треугольника.

§ 45. **Теорема.** *Діагонали параллелограмма взаимно дѣлятся пополамъ.*



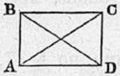
Черт. 70.

Проведемъ въ параллелограммѣ $ABCD$ (черт. 70) діагонали AC и BD; требуется доказать, что $AO = OC$ и $BO = OD$.

Доказ. Въ треугольникахъ BOC и AOD, по § 43, $BC = AD$, вслѣдствіе же параллельности сторонъ, $\angle OBC = \angle ODA$ и $\angle BCO = \angle OAD$; слѣдов. эти треугольники, по § 17, равны, и потому

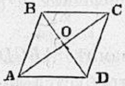
$$BO = OD \text{ и } AO = OC.$$

Очевидно, что діагонали прямоугольника, ромба и квадрата также взаимно дѣлятся пополамъ. Кромѣ того діагонали прямоугольника, ромба и квадрата имѣютъ особыя отличительныя свойства.



Черт. 71.

Діагонали AC и BD (черт. 71) *прямоугольника $ABCD$ равны между собою*; это слѣдуетъ изъ того, что прямоугольные треугольники ABC и BAD, въ которыхъ катетъ AB общій и кромѣ того $BC = AD$, равны между собою.

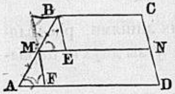


Черт. 72.

Діагонали AC и BD (черт. 72) *ромба $ABCD$ взаимно перпендикулярны;* это слѣдуетъ изъ того, что треугольники ABO и BOC, имѣющіе общую сторону BO, и кромѣ того, по положенію, $AB = BC$, а по доказанному, $AO = OC$, равны между собою; слѣдов. $\angle BOA = \angle BOC$. Изъ равенства тѣхъ же треугольниковъ слѣдуетъ, что $\angle ABO = \angle OBC$, т. е. *діагонали ромба дѣлятъ углы его пополамъ.*

Діагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны и дѣлятъ углы его пополамъ; это слѣдуетъ изъ того, что квадратъ соединяетъ въ себѣ всѣ свойства прямоугольника и ромба.

§ 46. **Теорема.** *Линія, соединяющая средины двухъ непараллельныхъ сторонъ трапеціи, 1) параллельна двумъ другимъ сторонамъ ея, и 2) равняется полусуммѣ ихъ.*



Чарт. 73.

Положимъ, что въ трапеціи $ABCD$ (черт. 73) M и N суть середины двухъ непараллельныхъ сторонъ ея; требуется доказать, 1) что MN параллельно AD и BC, и 2) что $MN = \frac{AD + BC}{2}$.

Доказ Проведя линіи BE и MF параллельно сторонѣ CD, замѣтимъ, что $MB = AM$, и $CN = ND$; но по § 37, $BE = CN$, $MF = ND$, слѣдов. $BE = MF$; наконецъ, такъ какъ (§ 36) линіи BE и MF параллельны между собою, то $\angle MBE = \angle AMF$. Слѣд. треугольники MBE и AMF, имѣющіе двѣ стороны и уголъ между ними равными, по § 15, равны между собою, и потому $\angle BME = \angle MAF$, а вслѣдствіе этого (§ 33) линіи MN и AD параллельны между собою.

Далѣе, изъ равенства тѣхъ же треугольниковъ MBE и AMF слѣдуетъ $ME = AF$; но такъ какъ (§ 36) $EN = BC$ и $FD = MN$, то находимъ:

$$MN = BC + ME;\quad MN = AD - AF = AD - ME;$$

складывая эти два равенства, получаемъ $2MN = BC + AD$, слѣдов. $MN = \frac{BC + AD}{2}$.

Задачи.

34. Чрезъ точку A провести линію параллельно данной прямой LM.

35. Чрезъ точку A провести линію, пересѣкающую прямую LM подъ даннымъ угломъ.

36. Найти геометрическое мѣсто точекъ отстоящихъ отъ прямой LM на разстояніи a.

37. Чему равняется сумма угловъ пятнадцатиугольника?

38. Сколько сторонъ имѣетъ многоугольникъ, сумма угловъ котораго равна $30d$?

39. Построить многоугольникъ равный данному многоугольнику.

40. Опредѣлить уголъ, составленный двумя линіями, раздѣляющими пополамъ внутренніе односторонніе углы двухъ параллельныхъ линій.

41. Чрезъ точку A провести сѣкущую къ двумъ параллельнымъ линіямъ LM и PQ, такъ, чтобы часть ея, заключающаяся между ними, равнялась данной линіи a.

42. Раздѣлить линію AB на n равныхъ частей.

43. Чрезъ точку O, находящуюся внутри угла BAC, провести прямую, такъ, чтобы часть ея, заключающаяся между сторонами угла, дѣлилась бы въ точкѣ O пополамъ.

44. Построить треугольникъ по данной высотѣ h и двумъ данным угламъ при основаніи.

45. Построить равнобедренный треугольникъ по данному основанію и углу при вершинѣ.

46 Построить треугольникъ по данному периметру p, данной высотѣ h и данному углу, прилежащему основанію.

47. Построить треугольникъ по данному периметру p и двумъ даннымъ угламъ m и n.

48. Построить параллелограммъ по двумъ даннымъ діагоналямъ и одной изъ сторонъ его.

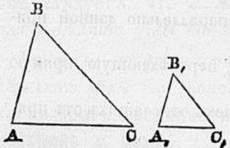
ГЛАВА IV.

Подобіе.

Подобіе прямолинейныхъ фигуръ. Отношеніе линій. Нѣкоторыя предложенія о треугольникѣ. Гармоническое дѣленіе. Задачи.

Подобіе треугольниковъ.

§ 47. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 74), которыхъ углы соотвѣтственно равны, называются *подобными*. Стороны, лежащія противъ равныхъ угловъ, называются *сходственными*.



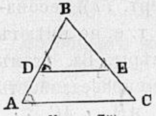
Черт. 74.

Подобіе обозначается иногда знакомъ $\sim$; такъ напримѣръ $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ означаетъ, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

Изъ опредѣленія подобія треугольниковъ слѣдуетъ:

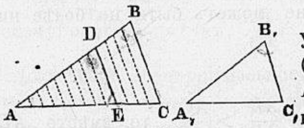
1) Два треугольника, имѣющіе по два соотвѣтственно равныхъ угла, подобны (§ 40 слѣд. 2).

2) Если въ треугольникѣ ABC (черт. 75) проведемъ линію DE параллельно сторонѣ AC, то отсѣченный треугольникъ DBE и треугольникъ ABC подобны, потому что, по § 35, $\angle BDE = \angle BAC$ и $\angle BED = \angle BCA$, какъ углы соотвѣтственные.



Черт. 75.

§ 48. Теорема. *Въ подобныхъ треугольникахъ сходственныя стороны пропорціональны.*



Черт. 76.

Положимъ, что въ треугольникахъ ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 76) $A = A_1$; $B = B_1$; $C = C_1$: требуется доказать, что

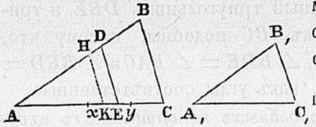
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Доказ. Отложимъ на AB и AC части AD и AE соотвѣтственно равныя A_1B_1 и A_1C_1 и соединимъ D и E; треугольники ADE и $A_1B_1C_1$, имѣя по двѣ стороны и по углу между ними равными, равны (§ 15); слѣд. $\angle B_1 = \angle ADE$, и какъ $\angle B_1 = \angle B$, то $\angle B = \angle ADE$, и потому, по § 33, линіи DE и BC параллельны между собою. Далѣе разсмотримъ два случая:

1-й случай, когда линіи AB и AD *соизмѣримы*, т. е. когда есть нѣкоторая часть, называемая *общею мѣрою*, которая содержится въ AB и AD цѣлое число разъ. Пусть общая мѣра содержится въ AB m разъ а въ AD n разъ, такъ что $\frac{AB}{AD} = \frac{m}{n}$. Если проведемъ чрезъ всѣ точки дѣленія линіи AB прямыя, параллельныя сторонѣ BC, то по § 42 линіи AC и AE раздѣлятся также на m и n равныхъ частей, такъ что $\frac{AC}{AE}=\frac{m}{n}$ и слѣдов.

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}.$$

2-й случай, когда линіи AB и AD (черт. 77) несоизмѣримы, т. е. не имѣютъ общей мѣры. Въ этомъ случаѣ справедливость пропорціи $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$ можно обнаружить, доказывая, что отношеніе $\frac{AB}{AD}$ не можетъ быть ни болѣе ни менѣе отношенія $\frac{AC}{AE}$.



Черт. 77.

Въ самомъ дѣлѣ, еслибы $\frac{AB}{AD}>\frac{AC}{AE}$, то вмѣсто AE возьмемъ мѣньшую линію Ax, такъ чтобы $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{Ax}$.

Раздѣлимъ сторону AC на такое число равныхъ частей, чтобы каждая часть была менѣе xE, тогда, по крайней мѣрѣ, одна изъ точекъ дѣленія будетъ лежать между x и E. Пусть будетъ K такая точка; проведя линію KH параллельно BC, и замѣтивъ, что линіи AC и AK соизмѣримы, находимъ, по предыдущему: $\frac{AB}{AH}=\frac{AC}{AK}$.

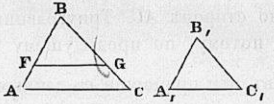
Если эту пропорцію раздѣлимъ на допущенную нами пропорцію $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{Ax}$ и сократимъ равные члены, то находимъ $\frac{AD}{AH}=\frac{Ax}{AK}$. Но отношенія $\frac{AD}{AH}$ и $\frac{Ax}{AK}$ не могутъ быть равны, потому что первое больше, а второе меньше единицы.

Изъ этого слѣдуетъ, что допущеніе $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{Ax}$ приводитъ къ ложному заключенію, слѣд. не справедливо, и что по этому отношеніе $\frac{AB}{AD}$ не можетъ быть больше отношенія $\frac{AC}{AE}$.

Подобнымъ же образомъ можно доказать, что отношеніе $\frac{AB}{AD}$ не можетъ быть и менѣе отношенія $\frac{AC}{AE}$, стоитъ только вмѣсто AE взять линію Ay бо̀льшую ея, и повторить предъидущія разсужденія.

И такъ въ случаѣ несоизмѣримости какъ въ случаѣ соизмѣримости имѣемъ $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$ или $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$.

Доказавши пропорціональность двухъ сторонъ подобныхъ треугольниковъ, можно обнаружить пропорціональность и сторонъ CB и C_1B_1, наложивъ $\triangle A_1B_1C_1$ (черт. 78) на $\triangle ABC$ такъ, чтобы уголъ B_1 совпалъ съ угломъ B и $\triangle A_1B_1C_1$ принялъ положеніе FBG. По предыдущему имѣемъ;



Черт. 78.

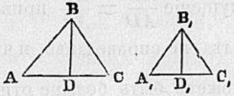
$$\frac{AB}{BF}=\frac{BC}{BG} \text{ или } \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$$

Соединивъ эту пропорцію съ прежде полученною пропорціею, находимъ:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1},$$

что и требовалось доказать.

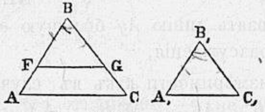
Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что въ подобныхъ треугольникахъ ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 79 см. на обор.)



Черт. 79.

высоты BD и B_1D_1 пропорціональны сторонамъ, потому что треугольники ABD и $A_1B_1D_1$, въ которыхъ $\angle A = \angle A_1$, по положенію, и $\angle ADB = \angle A_1D_1B_1$, какъ углы прямые, подобны, слѣдов. $\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$.

§ 49. **Теорема.** *Треугольники, которыхъ стороны пропорціональны, подобны между собою.*



Черт. 78.

Положимъ, что въ треугольникахъ ABC и $A_1B_1C_1$ (черт 78) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$; требуется доказать, что $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B$ $\angle C = \angle C_1$.

Доказ. Отложимъ на AB часть $FB = A_1B_1$ и проведемъ линію FG параллельно сторонѣ AC. Треугольники ABC и FBG подобны, и потому, по предыдущему §, $\frac{AB}{FB} = \frac{BC}{BG} = \frac{AC}{FG}$. Сравнивъ эти пропорціи съ данными пропорціями $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, и замѣтивъ, что, по построенію, $FB = A_1B_1$, заключаемъ, что $BG = B_1C_1$ и $FG = A_1C_1$. Слѣдов. треугольники FBG и $A_1B_1C_1$, имѣя всѣ стороны соотвѣтственно равными, по § 20, равны между собою, и потому $\angle A_1 = \angle F = \angle A$; $\angle C_1 = \angle G = \angle C$ и $\angle B_1 = \angle B$.

§ 50. **Теорема.** *Два треугольника, имѣющіе по равному углу, заключенному между пропорціональными сторонами, подобны между собою.*

Положимъ, что въ треугольникахъ ABC и $A_1B_1C_1$ (чер. 78) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ и $\angle B = \angle B_1$; требуется доказать, что $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$.

Доказ. Отложимъ на AB часть $BF = A_1B_1$, и проведемъ линію FG параллельно сторонѣ AC. Треугольники ABC и FBG подобны, а потому (§ 48) $\frac{AB}{FB} = \frac{BC}{BG}$. Сравнивъ эту пропорцію съ данною пропорціею $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$, и замѣтивъ притомъ, что, по построенію, $FB = A_1B_1$, заключаемъ, что $BG = B_1C_1$; слѣдов. треугольники FBG и $A_1B_1C_1$, имѣя двѣ стороны и уголъ между ними равными, по § 15, равны, и потому $\angle A_1 = \angle F = \angle A$ и $\angle C_1 = \angle G = \angle C$.

§ 51. **Теорема.** *Два треугольника, ~~которыхъ~~ стороны* которых *взаимно параллельны, подобны между собою.*

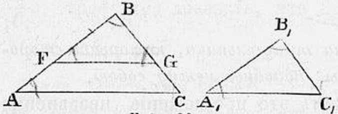
Доказ. Чтобы доказать это предложеніе независимо отъ взаимнаго положенія треугольниковъ, пусть будутъ A, B и C углы однаго и A_1, B_1, C_1 соотвѣтственные углы другаго треугольника, такъ что стороны одноименныхъ угловъ, напр. A и A_1, взаимно параллельны. По § 40: $A + B + C = 2d$ и $A_1 + B_1 + C_1 = 2d$, слѣдов. $(A + A_1) + (B + B_1) + (C + C_1) = 4d$. Еслибъ уголъ A не равнялся углу A_1, то, по § 38, $A + A_1 = 2d$; но въ такомъ случаѣ остальные два угла B и C, по § 40 слѣд. 3, не могутъ соотвѣтственно равняться угламъ B_1 и C_1; если же B не равняется B_1, то (§ 38) $B + B_1 = 2d$. Сложивъ $A + A_1 = 2d$ и $B + B_1 = 2d$, находимъ $(A + A_1) + (B + B_1) = 4d$, что противорѣчитъ равенству $(A + A_1) + (B + B_1) + (C + C_1) = 4d$.

Изъ этого слѣдуетъ, что $A = A_1$, $B = B_1$, слѣдов. и $C = C_1$.

§ 52. Теорема. *Два треугольника, которыхъ стороны взаимно перпендикулярны, подобны между собою.*

Доказ. Чтобы доказать это предложенiе независимо отъ положенiя треугольниковъ, пусть будутъ A, B и C углы однаго и A_1, B_1, C_1 соотвѣтственные углы другаго треугольника, такъ что стороны одноименныхъ угловъ, на пр. A и A_1, взаимно перпендикулярны. Такъ какъ $(A+A_1)+(B+B_1)+(C+C_1)=4d$, и соотвѣтственные углы, по § 39, или равны, или составляютъ вмѣстѣ $2d$, то заключаемъ, какъ въ предъидущемъ §, что $A=A_1$; $B=B_1$ и $C=C_1$.

§ 53. Теорема. *Если гипотенуза и катетъ одного прямоугольнаго треугольника пропорцiональны гипотенузѣ и катету другого, то такiе треугольники подобны.*



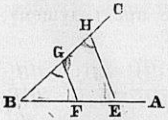
Черт. 80.

Положимъ, что въ прямоугольныхъ треугольн. ABC и $A_1B_1C_1$ (чер. 80) $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$; требуется доказать, что $A=A_1$ и $C=C_1$.

Доказ. Отложимъ на AB часть $FB=A_1B_1$, и проведемъ линiю FG параллельно AC, находимъ, по § 48: $\frac{AB}{FB}=\frac{AC}{FG}$. Сравнивъ эту пропорцiю съ данной пропорцiею $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$, и замѣтивъ притомъ, что, по построенiю, $FB=A_1B_1$, находимъ $FG=A_1C_1$; слѣдов. прямоугольные треугольники FBG и $A_1B_1C_1$, имѣя гипотенузу и одинъ изъ катетовъ равными, по § 25, равны, и потому

$$\angle A_1=\angle F=\angle A \text{ и } \angle C_1=\angle G=\angle C.$$

§ 54. Теорема. *Стороны угла, пересѣченныя двумя параллельными линiями, дѣлятся на части пропорцiональныя.*

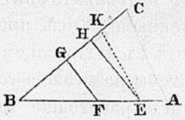


Черт. 81.

Положимъ, что линiи FG и EH (чер. 81) параллельны; требуется доказать, что $\frac{EF}{GH}=\frac{BF}{BG}$

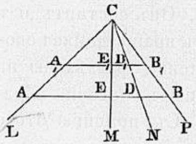
Доказ. Такъ какъ треугольники FBG и EBH подобны, то (§ 48) $\frac{BE}{BF}=\frac{BH}{BG}$; отсюда $\frac{BE-BF}{BF}=\frac{BH-BG}{BG}$; но такъ какъ $BE-BF=EF$ и $BH-BG=GH$, то $\frac{EF}{BF}=\frac{GH}{BG}$, или, переставляя среднiе члены: $\frac{EF}{GH}=\frac{BF}{BG}$.

Обратная теорема. Если стороны угла ABC (черт. 82) *раздѣляются двумя линiями FG и EH на части пропорцiональныя:* $\frac{EF}{GH}=\frac{BF}{BG}$, *то эти линiи параллельны.*



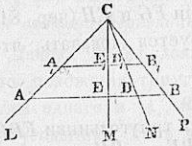
Черт. 82.

Доказ. Въ самомъ дѣлѣ, если бы линiя EH не была параллельна FG, то пусть EK будетъ параллельна FG, тогда, по предъидущей теоремѣ, находимъ: $\frac{EF}{GK}=\frac{BF}{BG}$, что противорѣчитъ предположенiю: $\frac{EF}{GH}=\frac{BF}{BG}$.



Черт. 83.

Предложенiе этого § есть частный случай другаго, болѣе общаго предложенiя: *линiи CL, CM, CN* и *CP*, (черт. 83), *выходящiя изъ одной точки C, дѣлятся двумя параллельными линiями AB и A_1B_1 на пропорцiональныя части, такъ что:* $\frac{CA_1}{AA_1}=\frac{CE_1}{EE_1}=\frac{CD_1}{DD_1}=\frac{CB_1}{BB_1}$.

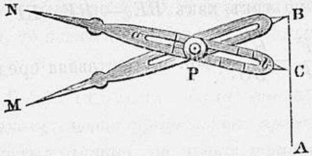


Черт. 83.

Въ самомъ дѣлѣ, по предъидущему, имѣемъ пропорціи

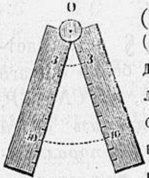
$$\frac{CA_1}{AA_1}=\frac{CE_1}{EE_1};\ \frac{CE_1}{EE_1}=\frac{CD_1}{DD_1};\ \frac{CD_1}{DD_1}=\frac{CB_1}{BB_1};$$

слѣдоват. $\frac{CA_1}{AA_1}=\frac{CE_1}{EE_1}=\frac{CD_1}{DD_1}=\frac{CB_1}{BB_1}$.



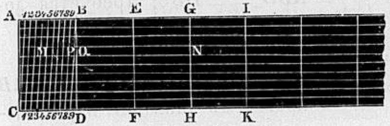
Черт. 84.

§ 55. На свойствѣ подобныхъ триугольниковъ основано устройство снаряда (черт. 84), называемаго *циркулемъ приведенія* (compas de reduction), и служащаго для раздѣленія линіи на нѣсколько равныхъ частей. Чтобы раздѣлить, съ помощію этого циркуля, линію *AB*, напр., на 3 равныя части, передвигаемъ винтъ *P* вдоль прорѣза *ab* на такое разстояніе отъ *M*, чтобы *MP*=3*PB*; мѣсто, въ которое должно остановить винтъ *P*, обозначается цыфрами, поставленными вдоль прорѣза *ab*. Установивъ и укрѣпивъ винтъ въ надлежащемъ мѣстѣ, разстворяютъ циркуль такъ, чтобы разстояніе точекъ *M* и *N* равнялось линіи *AB*, тогда разстояніе точекъ *B* и *C* будетъ третья часть линіи *AB*.



Черт. 85.

Вмѣсто этого циркула употребляется также приборъ (черт 85) называемый *циркулемъ пропорціи* (compas de proportion). Онъ состоитъ изъ двухъ равныхъ линеекъ вращающихся около шарньера *O*; линейки раздѣлены на одинаковое число равныхъ частей, обозначенныхъ цыфрами. Съ помощію этого циркуля можно опредѣлить линію, которая была бы въ данномъ отношеніи къ данной линіи. Положимъ напр., что требуется опредѣлить линію, которая относилась къ данной линіи, какъ 3; 10; для этого разстворяютъ циркуль такъ, чтобы разстояніе двухъ точекъ, обозначенныхъ цыфрою 10, равнялось данной линіи, тогда разстояніе двухъ точекъ, обозначенныхъ цыфрою 3, будетъ искомая линія.

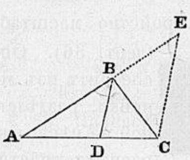


Черт. 86.

На томъ же началѣ основано устройство масштаба (черт. 86). Онъ состоитъ изъ линейки, раздѣленной на нѣсколько равныхъ частей *AB*, *BE*, *EG*..... представляющихъ принятую единицу масштаба. Ширина линейки равняется также этой единицѣ, т. е. *AC*=*AB*. Линія *AC*, также какъ и линія *AB*, раздѣлены на 10 равныхъ частей; чрезъ точки дѣленія *AC* проведены линіи параллельныя *AB*, а чрезъ точки дѣленія *AB*—линіи параллельныя линіи *C*1. Изъ устройства масштаба видно, что двѣ послѣдовательныя поперечныя линіи, напр. линіи 43 и 54, отсѣкаютъ отъ параллельныхъ линій, проведенныхъ вдоль линейки, десятыя части принятой единицы, между тѣмъ какъ части этихъ параллелей, содержащіяся между линіями *CA* и *C*1, будутъ равняться $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{20}$, $\frac{3}{10}$..., линіи *A*1, или $\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$...., принятой единицы.

Чтобы съ помощію масштаба измѣрить длину данной линіи, накладываютъ ее съ помощію циркуля на одну изъ параллельныхъ линій масштаба такимъ образомъ, чтобы концы циркуля совпадали приблизительно съ двумя точками дѣленія, напр. *N* и *M*; очевидно что линія *MN* состоитъ 1) изъ *N Q* т. е. изъ двухъ единицъ 2) изъ *MP* т. е. изъ пяти десятыхъ единицы и 3) изъ *PQ* т. е. изъ четырехъ сотыхъ единицы, слѣд. *MN*=2,54.

§ 56. ТЕОРЕМА. *Линія, дѣлящая уголъ треугольника пополамъ, дѣлитъ противуположную сторону на части пропорціональныя двумъ другимъ сторонамъ.*



Черт. 87.

Положимъ, что линія BD (чер. 87) дѣлитъ уголъ B треугольника ABC пополамъ, т. е. $\angle ABD = \angle DBC$; требуется доказать, что $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$

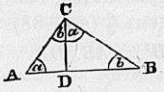
Доказ. Продолжимъ сторону AB и проведемъ линію CE параллельно сторонѣ BD. По § 35 $\angle BEC = \angle ABD$ и $\angle BCE = \angle DBC$, и такъ какъ, по положенію, $\angle ABD = \angle DBC$, то $\angle BEC = \angle BCE$, слѣд. $BC = BE$ (§ 18). Вслѣдствіи же параллельности линій EC и BD, $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BE}$ (§ 54), и такъ какъ $BE = BC$, то $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

Обратная теорема. Линія BD (черт. 87), *дѣлящая сторону* AC *на части пропорціональныя сторонамъ* AB *и* BC, *дѣлитъ уголъ* B *пополамъ.*

Положимъ, что $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$; требуется доказать, что $\angle ABD = \angle DBC$.

Доказ. Вслѣдствіе параллельности линій BD и EC имѣемъ (§ 54): $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$; сравнивъ эту пропорцію съ данной пропорціею, заключаемъ, что $BC = BE$, т. е. что треугольникъ CBE равнобедренный и $\angle BCE = \angle BEC$. Но, по § 35, $\angle ABD = \angle BEC$ и $\angle DBC = \angle BCE$, слѣд. $\angle ABD = \angle DBC$.

§ 57. ТЕОРЕМА. *Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямаго угла на гипотенузу, есть средняя пропорціональная между отрѣзками гипотенузы, а каждый изъ катетовъ есть средняя пропорціональная между гипотенузою и прилежащимъ отрѣзкомъ.*



Черт. 88.

Положимъ, что въ прямоугольномъ треугольникѣ ACB (черт. 88) CD есть перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямаго угла на гипотенузу AB; требуется доказать, что:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{DC}{DB};\quad \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \text{ и } \frac{AB}{CB} = \frac{CB}{DB}.$$

Доказ. Прямоугольные треугольники ABC и ACD, имѣющіе общій уголъ A, по § 40 слѣд. 3, равноугольны, слѣд. $\angle ABC = \angle ACD$. Равнымъ образомъ прямоугольные треугольники ABC и BCD, имѣющіе общій уголъ B также равноугольны, и потому $\angle BAC = \angle BCD$. Изъ этого слѣдуетъ, что оба треугольника ACD и DCB подобны треугольнику ACB, и потому они подобны между собою.

Изъ подобія триугульниковъ ACD и BCD слѣдуетъ (§ 48):

$$\frac{AD}{DC} = \frac{DC}{DB}.$$

Изъ подобія треугольниковъ ABC и ACD слѣдуетъ:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD},$$

наконецъ изъ подобія треугольник. ABC и DCB слѣдуетъ:

$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{DC}.$$

Взявши произведеніе среднихъ и крайнихъ членовъ, находимъ:

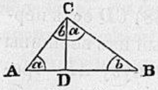
$$DC^2 = AD.\,DB;\quad AC^2 = AB.\,AD \text{ и } CB^2 = AB.\,DB.$$

Если раздѣлимъ второе равенство на третье, то получимъ:

$$\frac{AC^2}{CB^2} = \frac{AD}{DB},$$

т. е. *квадраты катетовъ относятся между собою какъ отрѣзки гипотенузы.*

§ 58. ТЕОРЕМА. *Квадратъ гипотенузы равняется суммѣ квадратовъ двухъ катетовъ.*



Черт. 88.

Доказ. Сложивъ два равенства, найденныя въ предъидущемъ § (чер. 88):

$$AC^2 = AB.\ AD \text{ и } CB^2 = AB.\ DB,$$

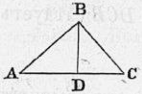
находимъ:

$$AC^2 + CB^2 = AB.\ AD + AB.\ DB = AB\ (AD + DB);$$

но такъ какъ $AD + DB = AB$, то $AB^2 + CB^2 = AB^2$.

Съ помощію этого соотношенія между гипотенузою и катетами можно опредѣлить гипотенузу, когда оба катеты даны: $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}$, и катетъ, когда гипотенуза и другой катетъ даны: $AC = \sqrt{AB^2 - CB^2}$; т. е. гипотенуза равна квадратному корню изъ суммы квадратовъ двухъ катетовъ, и катетъ равенъ квадратному корню изъ разности квадратовъ гипотенузы и другаго катета.

§ 59. ТЕОРЕМА. *Въ косоугольномъ треугольникѣ квадратъ стороны, лежащей противъ остраго угла, равняется суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ, безъ удвоеннаго произведенія основанія на отрѣзокъ его отъ вершины остраго угла до высоты.*



Черт. 89.

Положимъ, что въ треугольникѣ ABC (черт. 89) A есть острый уголъ, линія AC—основаніе, и BD—высота; требуется доказать, что:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC.\ AD.$$

Доказ. Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ BDC и BDA находимъ, по предъидущему §:

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 \text{ и } BD^2 = AB^2 - AD^2.$$

Кромѣ того $DC = AC - AD$, слѣд.

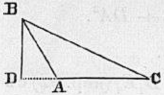
$$DC^2 = (AC - AD)^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC.\ AD.$$

Вставляя въ уравненіе $BC^2 = BD^2 + DC^2$, вмѣсто BD^2 и DC^2, найденныя выраженія, и сокративъ, получимъ:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC.\ AD.$$

---

§ 60. ТЕОРЕМА. *Въ тупоугольномъ треугольникѣ квадратъ стороны, лежащей противъ тупаго угла, равняется суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ, сложенной съ удвоеннымъ произведеніемъ основанія на отрѣзокъ его отъ вершины тупаго угла до высоты.*



Черт. 90.

Положимъ, что въ треугольникѣ ABC (черт. 90) A есть тупой уголъ, линія AC—основаніе, а BD—высота; требуется доказать, что

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC.\ AD.$$

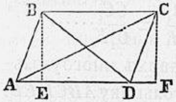
Доказ. Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ BDC и BDA имѣемъ (§ 58):

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 \text{ и } BD^2 = AB^2 - AD^2.$$

Кромѣ того $DC = AC + AD$, слѣд. $DC^2 = (AC + AD)^2 = AC^2 + AD^2 + 2AC.\ AD$. Вставивъ въ уравненія $BC^2 = BD^2 + DC^2$, вмѣсто BD^2 и DC^2, найденныя выраженія, и сокротивъ, находимъ:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC.\ AD.$$

§ 61. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ параллелограммѣ сумма квадратовъ діагоналей равняется суммѣ квадратовъ четырехъ сторонъ его.*



Черт. 91.

Положимъ, что $ABCD$ (чер. 91) есть параллелограммъ; требуется доказать, что $BD^2 + AC^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.

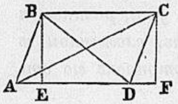
Доказ. Опустимъ изъ точки B перпендикуляръ на сторону AD и изъ точки C перпендикуляръ на продолженіе ея. По § 59 имѣемъ:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AD.\ AE,$$

и по § 60:

$$AC^2 = CD^2 + DA^2 + 2DA.\ DF.$$

Такъ какъ прямоугольные треугольники ABE и DCF имѣютъ равные гипотенузы AB и CD и равные катеты BE и CF (§ 37), то, по § 25, они равны между собою;



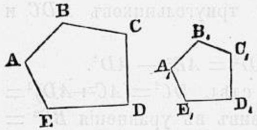
Черт. 91.

слѣдов. $AE=DF$. Вслѣдствіе этого при сложеніи двухъ предъидущихъ уравненій члены: $2AD. AE$ и $2DA. DF$ сократятся, и если замѣнимъ сторону AD равною ей стороною BC, то получимъ:

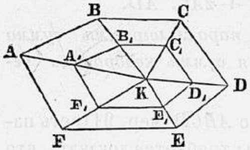
$$BD^2+AC^2=AB^2+BC^2+CD^3+DA^2.$$

—Подобіе многоугольниковъ.

§ 62. Два многоугольника $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (чер. 92) съ одинакимъ числомъ сторонъ, имѣющіе углы соотвѣтственно равные и стороны соотвѣтственно пропорціональныя, называются *подобными*. Пропорціональныя стороны называются *сходственными*.



Черт. 92.



Черт. 93.

Если отъ какой нибудь точки K внутри многоугольника $ABCDEF$ (чер. 93) проведемъ линіи ко всѣмъ вершинамъ его, и раздѣлимъ эти линіи въ точкахъ A_1, B_1, C_1...на пропорціональныя части, такъ чтобы:

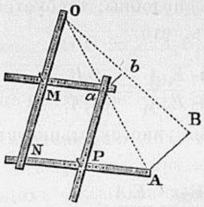
$$\frac{AA_1}{A_1K}=\frac{BB_1}{B_1K}=\frac{CC_1}{C_1K}.....,$$

то, соединивъ точки A_1, B_1, C_1...., составимъ многоугольникъ $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, подобный многоугольнику $ABCDEF$. Въ самомъ дѣлѣ, стороны двухъ многоугольниковъ, по § 54, соотвѣтственно параллельны, и потому соотвѣтственные углы, какъ углы съ параллельными сторонами, равны (§ 38). Кромѣ того изъ подобія треугольниковъ AKB и A_1KB_1, BKC и B_1KC_1, CKD и C_1KD_1 и т. д. слѣдуетъ:

$$\frac{A\ B}{A_1B_1}=\frac{B\ K}{B_1K}=\frac{B\ C}{B_1C_1}=\frac{C\ K}{C_1K}=\frac{C\ D}{C_1D_1}\ ......,$$ и отсюда

$$\frac{A\ B}{A_1B_1}=\frac{B\ C}{B_1C_1}=\frac{C\ D}{C_1D_1}....,$$ т. е. стороны пропорціональны.

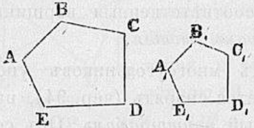
Точка K, отличающаяся тѣмъ свойствомъ, что линіи, проведенныя изъ нея къ вершинамъ одного многоугольника, проходятъ также чрезъ соотвѣтственныя вершины другаго, — называется *центромъ подобія*.



Черт 94.

Для рисованія подобныхъ многоугольниковъ употребляется снарядъ (чер. 94), называемый *пантографомъ*. Онъ состоитъ изъ четырехъ линеекъ ON, aP, aM и NA, соединенныхъ между собою въ точкахъ M, a, P и N такъ, что линейки свободно могутъ вращаться около этихъ точекъ. Притомъ снарядъ имѣетъ такое устройство, что $Ma=PN$ и $MN=aP$, и что три точки O, a и A лежатъ на одной прямой линіи. Очевидно, что вслѣдствіе этого $aMNP$, при всѣхъ возможныхъ положеніяхъ линейки, остается всегда параллелограммомъ и линейки ON и aP, равно какъ линейки aM и AN, всегда параллельными между собою. Предполагая точку O неподвижною, положимъ, что точка A опишетъ какую-нибудь прямую линію AB, тогда точка a, очевидно, опишетъ также прямую линію ab параллельную первой, и находящуюся съ ней въ постоянномъ отношеніи, равномъ отношенію: $\frac{OA}{Oa}$ или $\frac{ON}{OM}$. Слѣд., если точку A вести по периметру какого-нибудь многоугольника, то точка a опишетъ подобный ему многоугольникъ; соотвѣтственныя стороны этихъ двухъ многоугольниковъ будутъ въ постоянномъ отношеніи: $\frac{ON}{OM}$. Чтобы можно было произвольно измѣнять это отношеніе, четыре линейки снабжены равноотстоящими другъ отъ друга дырочками, которыя позволяютъ увеличивать и уменьшать длины aM и MN.

§ 63. Теорема. *Периметры подобныхъ многоугольниковъ пропорціональны сходственнымъ сторонамъ.*



Черт. 92.

Положимъ, что многоугольники $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (чер. 92) подобны; требуется доказать, что:

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1E_1+E_1A_1}=\frac{AB}{A_1A_1}.$$

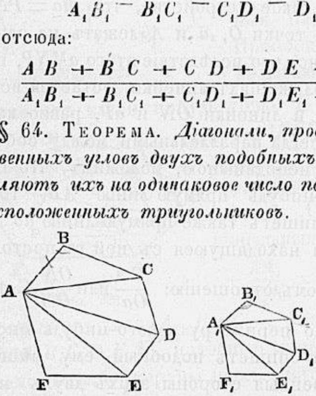
Доказ. Изъ опредѣленія подобія многоугольниковъ слѣдуетъ:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{EA}{E_1A_1},$$

и отсюда:

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1E_1+E_1A_1}=\frac{AB}{A_1B_1}.$$

§ 64. Теорема. *Діагонали, проведенныя изъ соотвѣтственныхъ угловъ двухъ подобныхъ многоугольниковъ, раздѣляютъ ихъ на одинаковое число подобныхъ и сходственно расположенныхъ треугольниковъ.*



Черт. 95.

Положимъ, что многоугольники $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (чер. 95) подобны, т. е. углы: A, B, C, D, E и F соотвѣтственно равны угламъ: A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 и F_1, и стороны: AB, BC, CD, DE, EF и FA соотвѣтственно пропорціональны сторонамъ: A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1 и E_1F_1; требуется доказать, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$; $\triangle ACD \sim \triangle B_1C_1D_1$; $\triangle ADE \sim \triangle A_1D_1E_1$ и $\triangle AEF \sim \triangle A_1E_1F_1$.

Доказ. Въ триугольникахъ ABC и $A_1B_1C_1$, по положенію, $\angle B = \angle B_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$; слѣдов. эти триугольники подобны (§ 50).

Изъ подобія же этихъ триугольниковъ слѣдуетъ, что $\angle BCA = \angle B_1C_1A_1$, и какъ, по положенію, $\angle C = \angle C_1$, то $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$; кромѣ того $\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$, и какъ, по положенію: $\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}$, то $\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}$; слѣдоват. триугольники ACD и $A_1C_1D_1$ подобны (§ 50).

Такимъ же образомъ доказывается подобіе и слѣдующихъ триугольниковъ

Изъ сказаннаго въ этомъ § слѣдуетъ, что и діагонали подобныхъ многоугольниковъ пропорціональны сходственнымъ сторонамъ.

Обратная теорема. Если два многоугольника $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (черт. 95) *діагоналями раздѣляются на одинакое число подобныхъ и сходственно расположенныхъ триугольниковъ, то такіе многоугольники подобны.*

Положимъ что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$; $\triangle ACD \sim \triangle A_1C_1D_1$ и т. д., требуется доказать, что $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$ и т. д., и $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}$ и т. д.

Доказ. Изъ подобія триугольниковъ ABC и $A_1B_1C_1$ слѣдуетъ $\angle B = \angle B_1$ и $\angle BCA = \angle B_1C_1A_1$; изъ подобія же триугольниковъ ACD и $A_1C_1D_1$ слѣдуетъ $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$, и потому $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$. Подобнымъ образомъ доказывается равенство и другихъ угловъ.

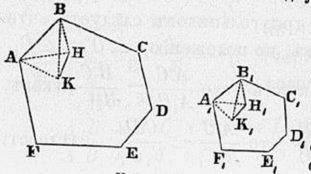
Далѣе, находимъ изъ подобія три—ковъ ABC и $A_1B_1C_1$:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1},$$

изъ подобія же триугольниковъ ACD и $A_1C_1D_1$ получаемъ:

$$\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{AC}{A_1C_1};\ \text{слѣдов.}\ \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}.$$

Такимъ же образомъ доказывается пропорціональность и другихъ сторонъ.

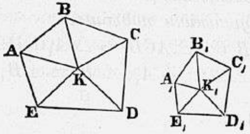


Черт. 96.

§ 65. Если внутри однаго изъ двухъ подобныхъ многоугольниковъ $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (черт. 96) беремъ произвольную точку K, и соединивши ее съ концами какой нибудь стороны AB, составимъ треугольникъ ABK, за тѣмъ надъ сходственной стороною A_1B_1 составимъ треугольн. $A_1B_1K_1$ ему подобный и одинаково съ нимъ расположенный, то точка K_1, такимъ образомъ опредѣленная, называется *соотвѣтственною точкою* K.

Линіи HK и H_1K_1, соединяющія двѣ взаимно соотвѣтственныя точки, называются *соотвѣтственными линіями.*

§ 66 Теорема. *Если изъ соотвѣтственныхъ точекъ двухъ подобныхъ многоугольниковъ проведемъ линіи ко всѣмъ вершинамъ ихъ, то многоугольники раздѣлятся на одинаков число подобныхъ и сходственно расположенныхъ треугольниковъ.*



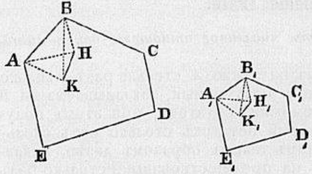
Черт. 97.

Положимъ, что въ подобныхъ многоугольникахъ (черт. 97) $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ точки K и K_1 суть точки соотвѣтственныя, т. е. $\triangle ABK \sim \triangle A_1B_1K_1$; требуется доказать, что $\triangle\ BKC \sim \triangle\ B_1K_1C_1$, $\triangle\ CKD \sim \triangle C_1K_1D_1$ и т. д.

Доказ. Изъ подобія многоугольниковъ и подобія треугольниковъ ABK и $A_1B_1K_1$ слѣдуетъ: 1) $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ и $\angle ABK = \angle A_1B_1K_1$, и потому $\angle KBC = \angle K_1B_1C_1$; 2) $\frac{A\ B}{A_1B_1} = \frac{B\ C}{B_1C_1}$ и $\frac{A\ B}{A_1B_1} = \frac{B\ K}{B_1K_1}$, и потому $\frac{B\ C}{B_1C_1} = \frac{B\ K}{B_1K_1}$. Слѣдов. треугольники BKC и $B_1K_1C_1$ подобны (§ 50).

Такимъ же образомъ доказывается подобіе и другихъ треугольниковъ.

§ 67. Теорема. *Соотвѣтственныя линіи пропорціональны сходственнымъ сторонамъ.*



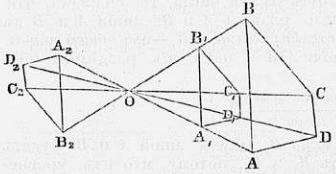
Черт. 98.

Положимъ, что K и K_1, H и H_1 (черт. 98) суть соотвѣтственныя точки двухъ подобныхъ многоугольниковъ $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$, т. е. $\triangle\ ABK \sim \triangle\ A_1B_1K_1$ и $\triangle\ ABH \sim \triangle\ A_1B_1H_1$; требуется доказать, что $\frac{K\ H}{K_1H_1} = \frac{A\ B}{A_1B_1}$.

Доказ. Изъ подобія треугольниковъ ABK и $A_1B_1K_1$, ABH и $A_1B_1H_1$ слѣдуетъ: 1) $\angle BAK = \angle B_1A_1K_1$ и $\angle BAH \angle B_1A_1H_1$, и потому $\angle\ HAK = \angle H_1A_1K_1$; 2) $\frac{A\ K}{A_1K_1} = \frac{A\ B}{A_1B_1}$ и $\frac{A\ H}{A_1H_1} = \frac{A\ B}{A_1B_1}$, и потому $\frac{A\ K}{A_1K_1} = \frac{A\ H}{A_1H_1}$. Слѣдов. треугольники AHK и $A_1H_1K_1$ подобны (§50).

Изъ этого слѣдуетъ, что $\frac{K\ H}{K_1H_1} = \frac{A\ K}{A_1K_1}$, и такъ какъ, по положенію, $\frac{A\ K}{A_1K_1} = \frac{A\ B}{A_1B_1}$, то $\frac{K\ H}{K_1H_1} = \frac{A\ B}{A_1B_1}$.

§ 68. *Центромъ подобія* двухъ подобныхъ многоугольниковъ называется вообще точка, такимъ образомъ расположенная относительно ихъ, что прямая, проведенная изъ нея въ какую нибудь точку однаго многоугольника, проходитъ чрезъ соотвѣтственную точку другаго.



Черт. 99.

Если изъ какой нибудь точки O (черт. 99) проведемъ прямыя линіи ко всѣмъ вершинамъ многоугольника $ABCD$, и продолживши ихъ, проведемъ A_1B_1 и A_2B_2 параллельно AB; B_1C_1 и B_2C_2 параллельно BC; C_1D_1 и C_2D_2 параллельно CD, A_1D_1 и A_2D_2 параллельно AD, то составятся два многоугольника $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$, подобные многоугольнику $ABCD$ (§ 62), которыхъ общій центръ подобія будетъ O.

Когда многоугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ расположены такъ, что соотвѣтственныя точки лежатъ по одной сторонѣ центра подобія O, то этотъ центръ называется *внѣшнимъ*, когда же многоугольники $ABCD$ и $A_2B_2C_2D_2$ расположены такъ, что соотвѣтственныя точки лежатъ по разнымъ сторонамъ центра подобія O, то этотъ центръ называется *внутреннимъ*.

Точка K, § 62 черт 93, есть внѣшній центръ подобія.

Отношеніе линій.

§ 69. **Задача** *Опредѣлить численное отношеніе двухъ линій A и B, предполагая $A > B$*

Рѣш. Линію B накладываемъ на линію A столько разъ, сколько возможно; остатокъ, при этомъ полученный, накладываемъ на B столько разъ сколько это возможно; остатокъ, при этомъ полученный, накладываемъ на первый остатокъ столько разъ сколько это возможно, и поступаемъ такимъ образомъ далѣе, накладывая полученный остатокъ на предшествовавшій столько разъ сколько это возможно. При этомъ могутъ быть два случая: 1) или мы доходимъ до остатка, который въ предшествовавшемъ остаткѣ содержится цѣлое число разъ такъ, что новаго остатка не получится, или 2) ни одинъ изъ остатковъ не будетъ содержаться цѣлое число разъ въ предшествовавшемъ остаткѣ

1-й случай. Положимъ, что B содержится m разъ въ A съ остаткомъ R_1, такъ что

$$A = m. B + R_1;$$

пусть R_1 содержится n разъ въ B, съ остаткомъ R_2, такъ что

$$B = n R_1 + R_2;$$

R_2 содержится p разъ въ R_1 съ остаткомъ R_3, такъ что

$$R_1 = p R_2 + R_3,$$

и наконецъ R_3 содержится q разъ въ R_2 безъ остатка, такъ что

$$R_2 = q R_3.$$

Изъ послѣднихъ двухъ уравненій находимъ:

$$R_1 = pR_2 + R_3 = (p q + 1) R_3;$$

слѣдов.

$$B = n R_1 + R_2 = [n (pq + 1) + q] R_3$$

$$A = m B + R_1 = [mn (pq + 1) + mq + pq + 1] R_3.$$

Такъ какъ m, n, p и q суть цѣлыя числа, то очевидно, что R_3 заключается цѣлое число разъ въ A и B; линіи A и B въ этомъ случаѣ называются *соизмѣримыми*, и R_3—ихъ *общею мѣрою*.

Отношеніе между линіями A и B находимъ, раздѣливъ первую на вторую:

$$\frac{A}{B} = \frac{m. n (pq + 1) + mq + pq + 1}{n (pq + 1) + q}.$$

Замѣтимъ, что общая мѣра R_3 двухъ линій A и B будетъ общею мѣрою и остатковъ R_1 и R_2, потому, что изъ уравненій: $A = m B + R_1$ и $B = n R_1 + R_2$, находимъ $R_1 = A - m B$ и $R_2 = B - n R_1$; отсюда слѣдуетъ, что линія, содержащаяся цѣлое число разъ въ A и B, будетъ содержаться также цѣлое число разъ въ R_1 и R_2.

2-й случай. Если ни одинъ изъ остатковъ не содержится цѣлое число разъ въ предшествовавшемъ остаткѣ, то линіи A и B не могутъ имѣть общей мѣры. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что въ этомъ случаѣ A и B имѣли бы общую мѣру P. Послѣдовательные остатки R_1 R_2 R_3 R_4... постепенно уменьшаются и могутъ быть сдѣланы менѣе всякой данной величины, потому

что, если примемъ остатки положительными или отрицательными, то можно допустить, что каждый остатокъ не болѣе половины предшествовавшаго остатка. Положимъ, что повторили послѣдовательныя дѣйствія столько разъ, что получили остатокъ $R_n < P$. Но P, какъ общая мѣра A и B, будетъ, по предъидущему, общею мѣрою и всѣхъ остатковъ, слѣдов. P должно содержаться цѣлое число разъ въ R_n, а это невозможно, когда $R_n < P$.

Линіи, неимѣющія общей мѣры, называются *несоизмѣримыми*, и численное отношеніе ихъ можетъ быть опредѣлено только по приближенію.

Изъ уравненій:

$$A = m B + R_1; B = n R_1 + R_2; R_1 = p R_2 + R_3; R_2 = q R_3 + R_4; \ldots,$$

находимъ:

$$\frac{A}{B} = m + \frac{R_1}{B} = m + \cfrac{1}{\cfrac{B}{R_1}};$$

$$\frac{B}{R_1} = n + \frac{R_2}{R_1} = n + \cfrac{1}{\cfrac{R_1}{R_2}}; \quad \frac{R_1}{R_2} = p + \frac{R_3}{R_2} = p + \cfrac{1}{\cfrac{R_2}{R_3}} \; \ldots\ldots,$$

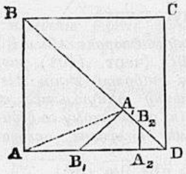
отсюда

$$\frac{A}{B} = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \ldots}}}$$

Прерывая непрерывную дробь на какомъ нибудь мѣстѣ, получаемъ приближенную величину отношенія двухъ линій A и B, и эта величина тѣмъ ближе подходитъ къ истинной величинѣ, чѣмъ больше членовъ непрерывной дроби принимаемъ въ расчетъ.

Отношеніе несоизмѣримыхъ величинъ назыв. *ирраціональнымъ*.

§ 70. **Теорема.** *Діагональ и сторона квадрата несоизмѣримы.*



Черт. 100.

Доказ. На діагоналѣ BD квадрата $ABCD$ (черт. 100) отложимъ $BA_1 = BA$, и проведемъ A_1B_1 перпендикулярно къ BD. Прямоугольные треугольники BAD и B_1A_1D, имѣющіе общій уголъ D, подобны, и такъ какъ $AB = AD$, то $A_1B_1 = A_1D$. Далѣе, такъ какъ въ равнобедренномъ треугольникѣ ABA_1 углы A и A_1 равны, то и $\angle B_1AA_1 = \angle B_1A_1A$, и потому $A_1B_1 = AB_1$; слѣдов. $A_1D = A_1B_1 = AB_1$. Изъ этого слѣдуетъ, что $A_1D < AD$, и что сторона квадрата содержится въ діагоналѣ только одинъ разъ съ остаткомъ A_1D.

Изъ подобія треугольниковъ ABD и A_1B_1D слѣдуетъ, что $\triangle A_1B_1D$ можетъ быть разсматриваемъ какъ половина квадрата, котораго сторона будетъ остатокъ A_1D, а діагональ линія B_1D; изъ сказаннаго же заключаемъ, что сторона A_1D содержится въ діагоналѣ B_1D одинъ разъ съ нѣкоторымъ остаткомъ A_2D, слѣдов. въ сторонѣ AD она содержится два раза съ тѣмъ же остаткомъ A_2D, а это значитъ, что первый остатокъ содержится въ сторонѣ квадрата два раза съ новымъ остаткомъ A_2D.

Если проведемъ A_2B_2 перпендикулярно къ AD, то составится треугольникъ A_2B_2D, который находится относительно $\triangle A_1B_1D$ въ подобномъ отношеніи, какъ $\triangle A_1B_1D$ относительно $\triangle ABD$; изъ подобія треугольниковъ A_1B_1D и A_2B_2D слѣдуетъ, что A_2B_2D можно разсматривать какъ половину квадрата, котораго сторона есть второй остатокъ A_2D, а діагональ — линія B_2D; а изъ прежде сказаннаго слѣдуетъ, что второй остатокъ A_2D содержится въ сторонѣ A_1D, т. е. въ первомъ остаткѣ, два раза съ новымъ остаткомъ.

Разсуждая такимъ образомъ далѣе, заключаемъ, что каждый остатокъ содержится въ предшествовавшемъ остаткѣ два раза съ новымъ остаткомъ, и потому линіи AB и BD несоизмѣримы. Если означимъ чрезъ a и d сторону и діагональ квадрата, и чрезъ r_1 r_2 r_3... послѣдовательные остатки, то

$$d = a + r;\ a = 2r_1 + r_2;\ r_1 = 2r_2 + r_3;\ r_2 = 2r_3 + r_4 \ldots;$$

слѣдов.

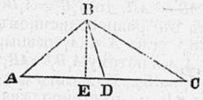
$$\frac{d}{a} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 \ldots}}}$$

Изъ прямоугольнаго и равнобедреннаго треугольника ABD находимъ: $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 2AB^2$, или $d^2 = 2a^2$; слѣдов. $d = a\sqrt{2}$. Если примемъ въ расчетъ пять членовъ непрерывной дроби, то находимъ $\frac{d}{a} = 1,41428 \ldots$; прямое же извлеченіе квадратнаго корня даетъ $\frac{d}{a} = \sqrt{2} = 1,41421 \ldots$

Нѣкоторыя предложенія о треугольникѣ.

§ 71. Теорема. *Сумма квадратовъ двухъ сторонъ AB и BC треугольника ABC* (черт. (101) *равняется двойному квадрату линіи BD, соединяющей вершину треугольника съ срединой основанія, сложенному съ двойнымъ квадратомъ половины основанія, т. е:*

$$AB^2 + BC^2 = 2\,BD^2 + 2\,AD^2.$$



Черт. 101.

Доказ. Опустивъ изъ вершины B перпендикуляръ BE на сторону AC, находимъ изъ остроугольнаго треугольника ABD (§ 59):

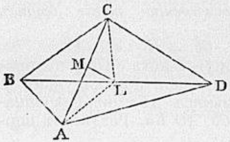
$$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2\,AD\,.\,ED,$$

а изъ тупоугольнаго треугольника BDC (§ 60):

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 + 2\,DC\,.\,ED.$$

Сложивъ эти два уравненія и замѣтивъ, что $DC = AD$, находимъ:

$$AB^2 + BC^2 = 2\,BD^2 + 2\,AD^2.$$



Черт. 102.

Если въ какомъ нибудь четыреугольникѣ $ABCD$ (черт. 102) проведемъ діагонали AC и BD, средины ихъ L и M соединимъ между собою, наконецъ проведемъ линіи LC и LA, то, по предъидущему, находимъ изъ треугольника BAD:

$$AB^2 + AD^2 = 2\,BL^2 + 2\,AL^2;$$

а изъ треугольника BCD:

$$BC^2 + CD^2 = 2\,BL^2 + 2\,CL^2.$$

Сложивъ эти два уравненія и замѣтивъ, что $4\,BL^2 = (2\,BL)^2 = BD^2$, находимъ:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = BD^2 + 2\,(AL^2 + CL^2)$$

Но изъ треугольника ALC получаемъ:

$$AL^2 + CL^2 = 2AM^2 + 2\,ML^2,$$

или умноживъ на 2:

$$2\,(AL^2 + CL^2) = 4\,AM^2 + 4\,ML^2 = AC^2 + 4\,ML^2.$$

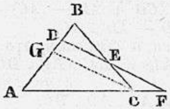
Вставляя это выраженіе въ предъидущее уравненіе, находимъ:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2 + 4\,ML^2,$$

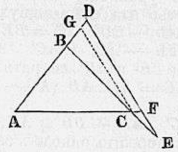
т. е. *сумма квадратовъ всѣхъ сторонъ какого нибудь четыреугольника равняется суммѣ квадратовъ его діагоналей, сложенной съ учетвереннымъ квадратомъ разстоянія между срединами діагоналей.*

§ 72 Теорема. *Если въ треугольникѣ ABC* (черт. 103 *и* 104) *проведемъ произвольную линію DF, отсѣкающую отъ каждой стороны его два отрѣзка: отъ AB—отрѣзки AD и DB, отъ BC — отрѣзки BE и EC и отъ AC — отрѣзки AF и CF, то произведеніе трехъ отрѣзковъ, не имѣющихъ общей вершины треугольника, равняется произведенію трехъ другихъ отрѣзковъ* (*):

$$AD\,.\,BE\,.\,CF = DB\,.\,EC\,.\,AF.$$



Черт. 103.

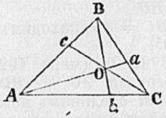


Черт. 104.

Доказ. Проведя CG параллельно линіи DF, находимъ (§ 54): $\frac{CF}{AF} = \frac{DG}{AD}$; $\frac{BE}{EC} = \frac{DB}{DG}$. Умноживъ эти двѣ пропорціи, получимъ $\frac{BE\,.\,CF}{EC\,.\,AF} = \frac{DB}{AD}$, или $AD\,.\,BE\,.\,CF = DB\,.\,EC\,.\,AF$.

(*) Это предложеніе, служившее основаніемъ всей Тригонометріи древнихъ, приписывается Греческому Геометру Menelaus (98 п. Р. X).

§ 73. **Теорема.** *Если чрезъ какую нибудь внутреннюю точку O треугольника ABC* (черт. 105) *проведемъ прямыя AOa, BOb и COc, раздѣляющія каждую сторону треугольника на два отрѣзка, то произведеніе трехъ отрѣзковъ, не имѣющихъ общей вершины треугольника, равняется произведенію трехъ другихъ отрѣзковъ:*



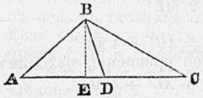
Черт. 105.

$$Ac\,.\,Ba\,.\,Cb = cB\,.\,aC\,.\,bA.$$

Доказ. Изъ треугольника ABa, пересѣченнаго прямою Cc, находимъ, на основаніи предъидущаго §: $Ac\ BC.\ aO = cB.\ aC.\ AO$; изъ треугольника ACa, пересѣченнаго прямой Bb, имѣемъ: $bA.\ aO.\ CB = Cb.\ AO\ Ba$. Раздѣливъ первое уравненіе на второе, находимъ:

$$\frac{Ac}{bA} = \frac{cB\,.\,aC}{Cb\,.\,Ba},\ \text{или}\ Ac.\ Ba.\ Cb = cB.\ aC.\ bA.$$

§ 74. **Теорема.** *Если вершину B треугольника ACB* (черт. 101) *соединимъ съ произвольной точкой D противуположной стороны, то:*



Черт. 101.

$$AB^2\ DC + BC^2.AD - BD^2.AC = AC.AD.CD.$$

Доказ. Проведя BE перпендикулярно къ AC, находимъ:

$$1)\ AB^2 = BE^2 + AE^2;$$

$$BC^2 = CE^2 + EB^2 = (AC - AE)^2 + EB^2$$

или

$$2)\ BC^2 = AC^2 + AE^2 - 2\ AC.AE.\ + EB^2;$$

$$BD^2 = BE^2 + ED^2 = BE^2 + (AD - AE)^2$$

или

$$3)\ BD^2 = BE^2 + AD^2 + AE^2 - 2\ AD\ .\ AE.$$

Помноживъ первое уравненіе на CD, второе на AD, третье на AC, и вычтя третье изъ суммы двухъ первыхъ, находимъ:

$$AB^2.\ CD + BC^2.\ AD - BD^2\,.\,AC = BE^2\ (CD + AD - AC)$$

$$AE^2\ (CD + AD - AC) + AC^2\ .\ AD - AD^2\ .\ AC.$$

Члены, содержащіе BE^2 и AE^2 сократятся, и замѣтивъ, что $AC^2\ .\ AD - AD^2\ .\ AC = AC\,.\,AD\ (AC - AD) = AC\ .\ AD\ .\ DC$, находимъ

$$AB^2\ .\ CD + BC^2\ .\ AD - BD^2\ .\ AC = AC\ .\ AD\ .\ DC.$$

Это предложеніе содержитъ одно изъ самыхъ общихъ свойствъ треугольника.

Если положимъ, что треугольникъ ABC равнобедренный: $AB = CB$, то предъидущее уравненіе принимаетъ видъ

$$AB^2\ (CD + AD) - BD^2\ .\ AC = AC\ .\ AD\ .\ DC;$$

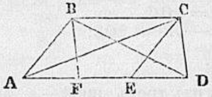
замѣтивъ, что $CD + AD = AC$, и сокративъ на AC, находимъ, для равнобедреннаго треугольника, слѣдующее уравненіе:

$$AB^2 - BD^2 = AD\ .\ CD.$$

Если положимъ, что точка D есть средина линіи AC, такъ что $AD = CD$ и $AC = 2\ AD$, то сокративъ общее уравненіе на AD, находимъ

$$AB^2 + BC^2 = 2\ BD^2 + 2\ AD^2.$$

Если въ трапеціи $ABCD$ (черт. 106) проведемъ діагонали AC и BD, кромѣ того, проведемъ BF параллельно CD и CE параллельно AB, то, по предъидущему, изъ треугольника ACD найдемъ:



Черт. 106.

$$AC^2.\ ED + CD^2.\ AE - CE^2.\ AD = AD.AE.\ ED,$$

а изъ треугольника ABD:

$$BD^2.\ AF + AB^2.\ FD - BF^2.\ AD = AD.\ AF.FD$$

Если сложимъ эти два уравненія и замѣтимъ, что вторыя части ихъ равны и что:

$$ED = AF;\ CE = AB;\ BF = CD;\ FD = BC,$$

то получимъ:

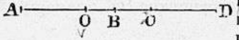
$$(AC^2 + BD^2)\ AF - CD^2\ (AD - AE) - AB^2.(AD - FD) = AD.\ AF.\ BC;$$

и какъ $AD - AE = AF$, то, по сокращенію на AF, находимъ:

$$AC^2 + BD^2 = CD^2 + AB^2 + AD.\ BC.$$

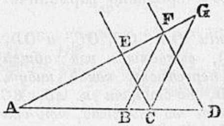
Гармоническое дѣленіе.

§ 75. Если линія AD (черт. 107) раздѣлена на такія три части AB, BC и CD, которыя со всею линіею AD составляютъ геометрическую пропорцію, въ которой крайніе отрѣзки AB и CD суть крайніе члены, а вся линія и средній отрѣзокъ BC,— средніе, или наоборотъ, т е. если $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD}$, то говорятъ, что линія AD раздѣлена *гармонически*, а точки A, B, C и D называютъ *гармоническими.* *)



Черт. 107.

Чтобъ раздѣлить данную линію AD (черт. 108) гармонически, назначаемъ на ней произвольно точку C, или что все равно — назначаемъ произвольную крайнюю часть CD. Проведя за тѣмъ чрезъ точку A какую нибудь прямую AG и чрезъ точки C и D двѣ параллели CE и DF, отложимъ $FG = EF$ и проведемъ FB параллельно GC, тогда B будетъ четвертая гармоническая точка къ тремъ точкамъ A, C и D. Въ самомъ дѣлѣ:



Черт. 108.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AF}{FG}\ \text{и}\ \frac{AD}{CD} = \frac{AF}{EF}$$

и такъ какъ, по построенію, $EF = FG$, то $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$.

Положимъ, что линія AD (черт. 107) раздѣлена гармонически въ точкахъ B и C и пусть будетъ O средина линіи AC, тогда *изъ трехъ линій OB, OC и OD, средняя — OC — есть средняя пропорціональная между двумя другими OB и OD.*

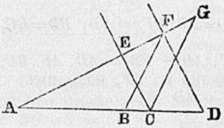
Въ самомъ дѣлѣ изъ пропорціи $\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC}$ находимъ

$$\frac{AD + CD}{2} : \frac{AD - CD}{2} = \frac{AB + BC}{2} : \frac{AB - BC}{2}.$$

---

*) De la Hire (1685) основалъ на гармоническомъ дѣленіи теорію коническихъ сѣченій въ духѣ древней Геометріи и чрезъ сочиненіе его названіе sectio harmonica преимущественно вошло въ употребленіе.

Но
$$AD + CD = AC + 2CD = 2\,(OC+CD) = 2OD;$$
$$AD - CD = 2OC;\; AB + BC = 2OC;$$
$$AB - BC = AC - 2BC = 2\,(OC - CB) = 2OB;$$
слѣдов.
$$\frac{OD}{OC} = \frac{OC}{OB}.$$



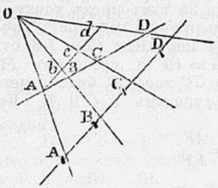
Черт. 108.

§ 76. Если изъ трехъ линій — a, b и c — первая относится къ третьей, какъ разность первой и второй относится къ разности второй и третьей, т. е. если
$$a : c = a - b : b - c,$$
то такая пропорція называется *среднею гармоническою пропорціею*, и линія b — *среднею гармонически пропорціональною*.

Взявъ произведеніе среднихъ и крайнихъ членовъ, найдемъ $ac - bc = ab - ac$; слѣдов. средній гармонически пропорціональный членъ $b = \dfrac{2\,a\,c}{a + c}$.

Если же въ пропорціи § 75 (черт. 107): $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{CD}{BC}$, замѣнимъ BC чрезъ $AC - AB$ и CD чрезъ $AD - AC$, то найдемъ
$$AD : AB = AD - AC : AC - AB.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что три части AD, AC, AB линіи AD, раздѣленной гармонически, составляютъ среднюю гармоническую пропорцію.



Черт. 109.

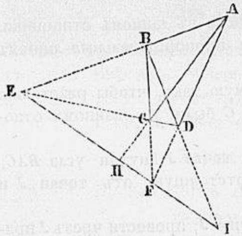
§ 77. **Теорема** *Если четыре линіи* OA_1, OB_1, OC_1 *и* OD_1 (черт. 109), *выходящія изъ общей точки* O, *пересѣчены какой нибудь прямою* AD, *то отрѣзки ея:* AB, BC *и* CD *имѣютъ то свойство, что отношеніе* $\dfrac{AB\,.\,CD}{AD\,.\,BC}$ *есть величина постоянная, независящая отъ положенія линіи* AD.

Доказ. Проведя какую нибудь линію $A_1\,D_1$ и чрезъ точку A линію Ad ей параллельную, находимъ изъ триугольника $Ac\bar{C}$, пересѣченнаго линіею OB, (§ 72): $Ab.Oc.CB = bc\,.\,OC\,.\,AB$, а изъ того же триугольника AcC, пересѣченнаго линіею OD, находимъ: $Ad.\ Oc.\ CD = cd.\ OC.\ AD$. Раздѣливъ второе уравненіе на первое, получимъ: $\dfrac{Ad\,.\,CD}{Ab\,.\,CB} = \dfrac{cd\ \ AD}{bc\,.\,AB}$, или $\dfrac{AB\,.\,CD}{AD\,.\,BC} = \dfrac{Ab\,.\,cd}{Ad\,.\,bc}$.
Но вслѣдствіе параллельности линій Ad и $A_1\,D_1$ имѣемъ:
$\dfrac{Ab}{Ad} = \dfrac{A_1B_1}{A_1D_1}$, и $\dfrac{cd}{bc} = \dfrac{C_1D_1}{B_1C_1}$; слѣдов. $\dfrac{Ab\,.\,cd}{Ad\,.\,bc} = \dfrac{A_1B_1\,.\,C_1D_1}{A_1D_1\,.\,B_1C_1}$, и потому
$$\frac{AB\,.\,CD}{AD\,.\,BC} = \frac{A_1B_1\,.\,C_1D_1}{A_1D_1\,.\,B_1C_1},$$
что и требовалось доказать.

Если линія AD въ точкахъ B и C раздѣлена гармонически, т. е $\dfrac{AD}{BA} = \dfrac{CD}{BC}$ или $AB\,.\,CD = AD\,.\,BC$, то $\dfrac{AC\,.\,DB}{AD\,.\,BC} = 1$; слѣдовательно въ этомъ случаѣ всякая другая линія $A_1\,D_1$ раздѣлится въ точкахъ B_1 и C_1 гармонически. Линіи OA_1, OB_1, OC_1 и OD_1 въ этомъ случаѣ называются *гармоническими лучами*, а точка O — *гармоническимъ центромъ*

Отношеніе $\dfrac{AB\,.\,CD}{AD\,.\,BC}$ называется *ангармоническимъ отношеніемъ*.

§ 78. Если въ какомъ нибудь четыреугольникѣ $ABCD$ (черт. 101). продолжимъ противуположныя стороны до ихъ пресѣченія: стороны AB и CD до точки E, а стороны BC и AD до точки F, то фигура, такимъ образомъ составленная, называется *полнымъ четыреугольникомъ*. Линія EF называется также діагональю, такъ что полный четыреугольникъ имѣетъ три діагонали AC, BD и EF.



Черт. 110.

Теорема. *Въ полномъ четыреугольникѣ каждая діагональ дѣлится гармонически двумя другими діагоналями.*

Продолжимъ діагонали AC и BD до пересѣченія съ діагональю EF; требуется доказать, что $\dfrac{EH}{EI} = \dfrac{HF}{FI}$.

Доказ. По § 72 имѣемъ изъ триугольника EAF, пересѣченнаго прямой BI:
$$AB\,.\,DF\,.\,EI = EB\,.\,AD\,.\,FI;$$
изъ триугольника EAH, пересѣченнаго прямой BF, имѣемъ:
$$EB\,.\,AC\,.\,HF = AB\,.\,CH\,.\,EF;$$
наконецъ изъ триугольника HAF, пересѣченнаго прямой ED:
$$CH\,.\,AD\,.\,EF = AC\,.\,DF\,.\,EH,$$

Перемноживъ эти три уравненія и сокративъ равные члены, находимъ:
$$HF\,.\,EI = FI\,.\,EH, \text{ или } \frac{EH}{EI} = \frac{HF}{FI}.$$

Задачи.

49. Стороны триугольника соотвѣтственно равны 3, 4 и 5; опредѣлить уголъ, лежащій противъ бо̀льшей стороны.

50. Лѣстница, длиною въ 10 фут., приложена къ вертикальной стѣнѣ такъ, что основаніе лѣстницы отстоитъ отъ стѣны на 6 фут.; на какой высотѣ находится вершина лѣстницы?

51 Если основаніе лѣстницы отодвинется отъ стѣны еще за 2 ф., на сколько футовъ понизится вершина ея?

52. Стороны треугольника соотвѣтственно равны 10, 15 и 20; какого вида уголъ, лежащій противъ бо́льшей стороны?

53. Периметръ прямоугольнаго треугольника равенъ $2p$ и одинъ изъ катетовъ равенъ b; опредѣлить гипотенузу.

54. Три стороны треугольника соотвѣтственно равны a, b и c; опредѣлить длину линіи l, соединяющей вершину A треугольника съ срединою противуположной стороны.

55. Найти четвертую пропорціональную къ тремъ даннымъ линіямъ a, b и c.

56. Раздѣлить линію AB на двѣ части въ данномъ отношеніи.

57. Раздѣлить линію AB на части пропорціональныя линіямъ m, n, p и q.

58. Чрезъ точку A провести прямую такъ, чтобы разстоянія ея отъ двухъ данныхъ точекъ B и C были въ данномъ отношеніи $m:n$.

59. Даны двѣ прямыя AB и AC и точка J внутри угла BAC; найти на прямой AC точку, равноотстоящую отъ точки J и отъ прямой AB.

60. Даны двѣ прямыя AB и AC и точка J; провести чрезъ J прямую такъ, чтобы части ея, отсѣкаемыя прямыми AB и AC, были въ данномъ отношеніи $m:n$.

61. Изъ точки J проведены прямыя къ разнымъ точкамъ данной линіи AB; опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ, дѣлящихъ эти линіи въ отношеніи $m:n$.

62. Стороны параллелограмма соотвѣтственно равны 9 фут., и 3 фут., разстояніе же двухъ сторонъ въ 9 фут. равно 5; опредѣлить разстояніе двухъ другихъ сторонъ.

63. Построить треугольникъ, въ которомъ три линіи, соединяющія вершины треугольника съ срединами противуположныхъ сторонъ, соотвѣтственно равны l, l_1, l_2.

64. Даны діагонали d и d_1 параллелограмма и одна изъ сторонъ его a, опредѣлить другую сторону.

65 Построить на данной линіи AB многоугольникъ подобный данному.

66. Вписать квадратъ въ треугольникъ ABC.

67. Въ треугольникѣ ABC вписать прямоугольникъ, котораго стороны находятся въ отношеніи $m:n$.

68. Найти геометрическое мѣсто точекъ подъ условіемъ, чтобы сумма квадратовъ разстояній каждой изъ нихъ отъ двухъ данныхъ точекъ A и B равнялась данной величинѣ m^2.

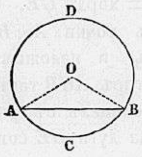
ГЛАВА V.

Объ окружности круга.

Хорды и касательныя. Измѣреніе угловъ. Пропорціональныя линіи въ кругѣ. Вписанные и описанные многоугольники. Относительное положеніе двухъ окружностей. Четыре замѣчательныя точки треугольника. Взаимныя точки. Поляры. Задачи.

Хорды и касательныя.

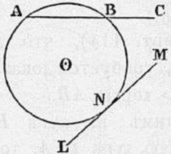
§ 79. Всякая часть ACB (черт. 111) окружности круга называется *дугою* (§ 11), линія же AB, соединяющая концы дуги и не проходящая чрезъ центръ — *хордою*. Каждая хорда AB соотвѣтствуетъ двумъ неравнымъ дугамъ ACB и ADB, составляющимъ вмѣстѣ полную окружность.



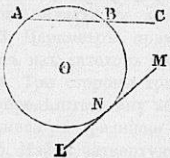
Черт. 111.

Очевидно, что всякая хорда меньше діаметра, потому что, соединивъ концы хорды A и B съ центромъ, находимъ (§ 13) $AB < AO + OB$, но $AO + OB$ равняется діаметру.

Линія ABC (черт. 112), пересѣкающая окружность, называется *сѣкущею*. Сѣкущая можетъ пересѣкать окружность не болѣе какъ въ двухъ точкахъ, потому что если бы она имѣла еще третью точку общую съ окружностью, то три точки прямой отстояли бы отъ точки O на равныхъ разстояніяхъ, что противно § 30.



Черт. 112.

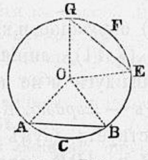


Черт. 112.

Линія LM (чер. 112), имѣющая только одну общую точку N съ окружностью, называется *касательною*, общая же точка N—*точкою прикосновенія*. Касательную можно разсматривать какъ сѣкущую, которой двѣ точки пересѣченія слились въ одну точку.

Часть $AOBC$ (черт. 111) круга, ограниченная дугою и двумя радіусами, называется *вырѣзкомъ* или *секторомъ*, а часть ABC, ограниченная дугою и хордою — *отрѣзкомъ* или *сегментомъ*.

§ 80. ТЕОРЕМА. *Равныя дуги стягиваются равными хордами.*



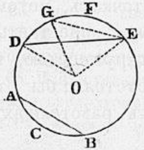
Черт. 113.

Положимъ, что (черт. 113) дуга ACB = дугѣ GFE; требуется доказать, что хорда AB = хордѣ GE.

Доказ. Соединимъ точки A, B, G и E съ центромъ и наложимъ секторъ GOE на секторъ AOB такъ, чтобы радіусъ OG совпалъ съ радіусомъ OA и точка G съ точкою A, тогда дуга GE совмѣстится съ дугою AB, потому что всѣ точки обѣихъ дугъ находятся на равныхъ разстояніяхъ отъ центра. Вслѣдствіе же равенства дугъ точка E совпадетъ съ точкою B и хорда GE съ хордою AB.

Очевидно, что справедливо и обратная теорема

§ 81. ТЕОРЕМА. *Бо̀льшая дуга стягивается и бо̀льшею хордою.*



Черт. 114.

Положимъ (черт. 114), что дуга $DFE >$ дуги ACB, требуется доказать, что хорда $DE >$ хорды AB.

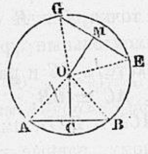
Доказ. Отложимъ на дугѣ EFD часть EFG равную дугѣ BCA, тогда, по предъидущему §, $GE = AB$. Если же соединимъ точки D, G и E съ

центромъ O и замѣтимъ, что въ треугольникахъ GOE и DOE сторона OE общая и $DO = OG$, какъ радіусы, углы же GOE и DOE неравны, то, по § 19, найдемъ $DE > GE$ или $DE > AB$.

Обратная теорема. Бо̀льшая хорда стягиваетъ и бо̀льшую дугу.

Доказ. Когда одна хорда больше другой, то дуга первой не можетъ равняться дугѣ второй, потому что тогда и хорды были бы равны (§ 80), что противно положенію; но первая дуга также не можетъ быть меньше второй, потому что тогда, по предъидущей теоремѣ, и первая хорда была бы меньше второй, что также противно положенію; слѣд. первая дуга будетъ больше второй.

§ 82. ТЕОРЕМА. *Равныя хорды равно удалены отъ центра.*



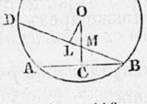
Черт. 115.

Положимъ, (черт. 115) что $AB = GE$, $OC \perp AB$ а $OM \perp GE$, требуется доказать, что $OC = OM$.

Доказ. Соединимъ точки A, B, E и G съ центромъ O и замѣтимъ, что треугольники AOB и GOE, въ которыхъ $AB = GE$, по положенію, а остальныя стороны равны, какъ радіусы, равны между собою (§ 20), слѣд. и высоты этихъ треугольниковъ OC и OM равны (§ 24, слѣдствіе).

Очевидно, что справедливо и обратная теорема.

§ 83. ТЕОРЕМА. *Бо̀льшая хорда ближе къ центру.*



Черт. 116.

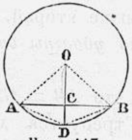
Положимъ (черт. 116), что $AB < DB$, и что $OC \perp AB$ и $OL \perp DB$; требуется доказать, что $OC > OL$.

Доказ. Линія OM, какъ наклонная, больше перпендикуляра OL (§ 28), слѣдов. и $OC > OL$.

Обратная теорема. Изъ двухъ хордъ та больше, которая ближе къ центру.

Доказ. Когда одна хорда ближе къ центру нежели другая, то первая не можетъ равняться второй, потому что тогда разстоянія ихъ отъ центра были бы равны (§ 82), что противно положенію; но первая хорда также не можетъ быть меньше второй, потому что тогда, по предыдущему, разстояніе первой отъ центра было бы больше разстоянія второй, что также противно положенію; слѣдов. первая хорда будетъ больше второй.

§ 84. ТЕОРЕМА. *Радіусъ, перпендикулярный къ хордѣ, дѣлитъ хорду и стягиваемую ею дугу пополамъ.*



Черт. 117.

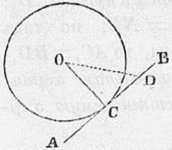
Положимъ (черт. 117), что радіусъ OD перпендикуляренъ къ хордѣ AB; требуется доказать, что $AC = CB$, и дуга $AD =$ дугѣ DB.

Доказ. Соединимъ точки A и B съ точками O и D; прямоугольные треугольники AOC и BOC, имѣющіе общій катетъ OC и равныя гипотенузы, равны (§ 25), слѣдов. $AC = CB$.

Далѣе, прямоугольные треугольники ACD и BCD, имѣющіе общій катетъ CD, и, по доказанному, равные катеты AC и BC, равны (§ 23); слѣдов. $AD=DB$, и потому, по § 80, дуга $AD =$ дугѣ DB.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что три точки O, C и D т. е. центръ, середина хорды и середина дуги, лежатъ на одной прямой, перпендикулярной къ хордѣ. Слѣдов. линія, проходящая чрезъ двѣ изъ этихъ точекъ, пройдетъ также чрезъ третью и будетъ перпендикулярна къ хордѣ; а линія, перпендикулярная къ хордѣ и проходящая чрезъ одну изъ этихъ точекъ, пройдетъ также чрезъ двѣ другія точки.

§ 85. ТЕОРЕМА. *Касательная перпендикулярна къ радіусу, проведенному въ точку прикосновенія.*



Черт. 118.

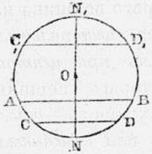
Пусть будетъ (черт 118) прямая AB касательна къ кругу въ точкѣ C; требуется доказать, что радіусъ OC перпендикуляренъ къ AB.

Доказ. Такъ какъ, по положенію, всякая точка D прямой AB лежитъ внѣ круга, то $OD>OC$; слѣдов. OC есть кратчайшее разстояніе центра O отъ прямой AB; кратчайшее же разстояніе точки отъ прямой есть перпендикуляръ (§ 28).

Обратная теорема. Линія AB, имѣющая общую точку C съ окружностью и перпендикулярная къ радіусу OC, есть касательная.

Доказ. Соединивъ какую нибудь точку D прямой AB съ центромъ, находимъ, что OD, какъ наклонная, больше перпендикуляра OC, т. е. больше радіуса, и потому всѣ точки прямой AB, за исключеніемъ точки C, лежатъ внѣ круга, а это значитъ, что линія AB есть касательная.

§ 86. ТЕОРЕМА. *Дуги, содержащіяся между параллельными хордами, равны.*



Черт. 119.

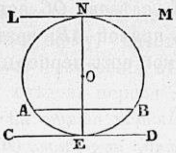
Доказ. Положимъ, во первыхъ, что хорды AB и CD (черт. 119), лежащія по одной сторонѣ центра, параллельны между собою; требуется доказать, что дуга $AC =$ дугѣ DB.

Проведемъ радіусъ ON перпендикулярно къ хордѣ CD; по параллельности хордъ, линія ON будетъ перпендикулярна и къ хордѣ AB; слѣдов. $AN=NB$ и $CN=ND$ (§ 84); вычитая изъ перваго равенства второе, найдемъ $AC = DB$.

Положимъ, во вторыхъ, что хорды AB и C_1D_1, лежащія по разнымъ сторонамъ центра, параллельны между собою; требуется доказать, что и въ этомъ случаѣ $AC_1=BD_1$.

Продолжимъ радіусъ ON до пересѣченія съ дугою C_1D_1; по § 84 находимъ: $C_1N_1 = N_1D_1$; $AN = NB$; но такъ какъ полуокружности NCN_1 и NBN_1 равны, то $AC_1 = BD_1$.

§ 87. Теорема. *Касательная, параллельная хордѣ, дѣлитъ въ точкѣ прикосновенія дугу, стягиваемую хордою, пополамъ.*



Черт, 120.

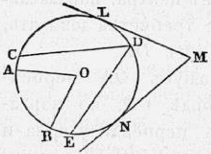
Положимъ (черт. 120), что касательная CD параллельна хордѣ AB; требуется доказать, что $AE = EB$.

Доказ. Соединивъ центръ O съ точкою прикосновенія E, находимъ, что радіусъ OE перпендикуляренъ къ касательной CD (§ 85); вслѣдствіе же параллельности линій AB и CD радіусъ OE будетъ также перпендикуляренъ и къ хордѣ AB; слѣдов. $AE = EB$ (§ 84).

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что точки касанія двухъ параллельныхъ касательныхъ CD и LM дѣлятъ окружность на двѣ равныя части.

Измѣреніе угловъ.

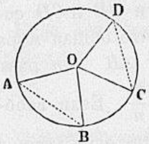
§ 88. Уголъ AOB (черт. 121), котораго вершина находится въ центрѣ круга, называется *центральнымъ угломъ* или *угломъ при центрѣ*; уголъ CDE, котораго вершина находится на окружности—*угломъ при окружности* или *вписаннымъ угломъ*, а уголъ LMN, котораго стороны касательны къ окружности,—*описаннымъ угломъ*.



Черт. 121.

Дуга $CLDNE$, вмѣщающая въ себѣ вписанный уголъ CDE, называется *дугою вмѣщающею уголъ CDE*.

§ 89. Теорема. *Равнымъ центральнымъ угламъ соотвѣтствуютъ равныя дуги.*



Черт. 122.

Положимъ, что (черт. 122) $\angle AOB = \angle COD$; требуется доказать, что дуга AB = дугѣ CD.

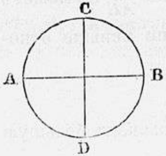
Доказ. Проведя хорды AB и CD, замѣтимъ, что въ треугольникахъ AOB и COD углы AOB и COD, по положенію, равны, стороны же, заключающія эти углы, какъ радіусы, также равны; слѣд. эти треугольники (§ 15) равны, и потому $AB = CD$; равныя же хорды стягиваютъ равныя дуги (§ 80), слѣд. дуга AB = дугѣ CD.

Обратная теорема. Равнымъ дугамъ соотвѣтствуютъ равные центральные углы.

Положимъ (черт. 122), что дуга AB = дугѣ CD; требуется доказать, что $\angle AOB = \angle COD$.

Доказ. Изъ равенства дугъ AB и CD слѣдуетъ (§ 80) равенство хордъ AB и CD, слѣд. треугольники AOB и COD, имѣющіе три соотвѣтственно равныя стороны, равны (§ 20), и потому $\angle AOB = \angle COD$.

Изъ сказаннаго въ этомъ § слѣдуетъ, что два взаимно перпендикулярные діаметры AB и CD (черт. 123), образуя при центрѣ четыре прямыхъ угла, раздѣляютъ окружность на четыре равныя части AC, CB, BD и AD. Каждая изъ этихъ частей называется четвертью окружности или *квадрантомъ*.

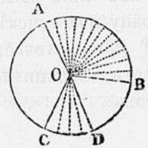


Черт. 123.

§ 90. Теорема. *Центральные углы относятся между собою какъ соотвѣтствующія имъ дуги.*

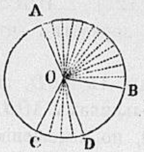
Пусть будутъ AOB и COD (черт. 124) два центральныхъ угла; требуется доказать, что

$$\frac{AOB}{COD} = \frac{\text{дуг. } AB}{\text{дуг. } CD}.$$



Черт. 124.

Доказ. Разсмотримъ два случая.

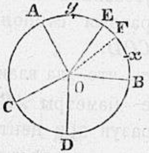


Черт. 124.

1-й случай, когда дуги *AB* и *CD* соизмѣримы. Положимъ, что общая мѣра содержится m разъ въ *AB* и n разъ въ *CD*, такъ что $\frac{AB}{CD}=\frac{m}{n}$. Если вообразимъ радіусы чрезъ всѣ точки дѣленія дугъ *AB* и *CD*, то углы *AOB* и *COD* раздѣлятся соотвѣтственно на m и n равныхъ частей (§ 89), такъ что $\frac{AOB}{COD}=\frac{m}{n}$; слѣд.

$$\frac{AOB}{COD}=\frac{AB}{CD}.$$

2-й случай, когда дуги *AB* и *CD* (черт. 125) несоизмѣримы.



Черт. 125.

Отложимъ на дугѣ *AB* часть $AE=CD$, соединимъ точки *E* и *O*, такъ что $\angle AOE=\angle COD$ (§ 89), и докажемъ, что отношеніе $\frac{AB}{AE}$ не можетъ быть ни больше ни меньше отношенія $\frac{AOB}{AOE}$.

Пусть $\frac{AB}{AE}>\frac{AOB}{AOE}$. Вмѣсто *AE* возьмемъ большую дугу *Ax*, такъ чтобы $\frac{AB}{Ax}=\frac{AOB}{AOE}$. Раздѣливъ дугу *AB* на такія равныя части, чтобы каждая изъ нихъ была меньше *Ex*, найдемъ по крайней мѣрѣ одну изъ точекъ дѣленій между *E* и *x*. Пусть будетъ *F* такая точка; тогда дуги *AB* и *AF* соизмѣримы, и если соединимъ точки *F* и *O*, то получимъ, по доказанному:

$$\frac{AB}{AF}=\frac{AOB}{AOF}.$$

Если эту пропорцію раздѣлимъ на допущенную нами пропорцію

$$\frac{AB}{Ax}=\frac{AOB}{AOE}.$$

и сократимъ равные члены, то найдемъ

$$\frac{Ax}{AF}=\frac{AOE}{AOF}.$$

Но эта пропорція не вѣрна, потому что отношеніе $\frac{Ax}{AF}$ больше, а отношеніе $\frac{AOE}{AOF}$ меньше единицы. Изъ этого заключаемъ, что допущеніе $\frac{AB}{AE}>\frac{AOB}{AOE}$ приводитъ къ невѣрному слѣдствію, и потому не можетъ быть справедливо.

Такимъ же образомъ можно доказать, что допущеніе $\frac{AB}{AE}<\frac{AOB}{AOE}$, приводитъ къ подобному же несообразному слѣдствію, — стоитъ только, вмѣсто *AE*, взять меньшую дугу *Ay*, и повторить предъидущія разсужденія. Итакъ, въ случаѣ несоизмѣримости равно какъ и въ случаѣ соизмѣримости, имѣемъ:

$$\frac{AOB}{AOE}=\frac{AB}{AE}.$$

§ 91. На предложеніи предъидущаго § основывается измѣреніе угловъ дугами.

Всякую окружность мы воображаемъ раздѣленной на 360 равныхъ частей, называемыхъ *градусами*, каждый градусъ на 60 частей, называемыхъ *минутами*, а каждую минуту на 60 частей, называемыхъ *секундами*. (*) Такимъ образомъ всякая окружность содержитъ 360 гра-

---

(*) Во Франціи употребляется иногда дѣленіе окружности на 400 равныхъ частей называемыхъ *градами*; градъ дѣлится на 100 минутъ, а минута на 100 секундъ.

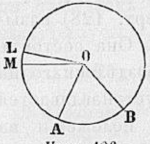
дусовъ, или 360. 60=21600 минутъ, или 21600. 60 = 1296000 секундъ; половина окружности — 180 градусовъ, или 180. 60 = 10800 минутъ, или 10800. 60 = 648000 секундъ; четверть окружности, или квадрантъ — 90 градусовъ, или 90.60=5400 минутъ, или 5400. 60 = 324000 секундъ.

Градусъ обозначается знакомъ °, минута знакомъ ′, а секунда знакомъ ″; такъ напр. $57^{\circ}17'44'',8$ означаетъ дугу круга, содержащую 57 градусовъ, 17 минутъ и 44, 8 секундъ. (*)

Если вообразимъ радіусы ко всѣмъ 360 точкамъ, которыя дѣлятъ окружность на градусы, то около центра образуются 360 равныхъ угловъ, называемыхъ *угловыми градусами*; каждый угловой градусъ дѣлится на 60 равныхъ частей, называемыхъ *угловыми минутами*, каждая же угловая минута на 60 частей, называемыхъ *угловыми секундами*.

Очевидно, что всякій прямой уголъ содержитъ 90 угловыхъ градусовъ, и такъ какъ прямой уголъ имѣетъ постоянную величину, то и угловой градусъ есть постоянная величина. Въ этомъ заключается существенное различіе угловаго градуса отъ дуговаго; дуговой градусъ зависитъ отъ величины самой окружности, т. е. отъ радіуса ея, между тѣмъ какъ угловой градусъ имѣетъ опредѣленную величину. Вслѣдствіе этого величину угловаго градуса принимаютъ за единицу при измѣреніи угловъ

(*) Дѣленіе окружности на 360 равныхъ частей принадлежитъ весьма древнему времени, но подраздѣленіе градуса на 60 минутъ, а минуты на 60 секундъ, мы встрѣчаемъ въ первый разъ только у Греческихъ Астрономовъ. Число 360, равное 2.2.2.3.3.5, представляетъ, вслѣдствіе большаго числа своихъ дѣлителей, много удобствъ въ практическомъ отношеніи; оно дѣлится на цѣло на 22 цѣлыя числа.

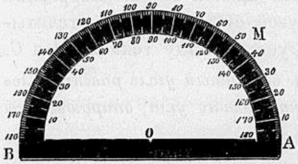


Черт, 126.

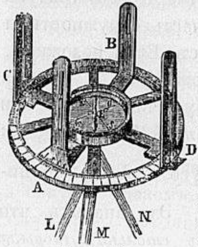
Пусть будетъ *LM* (черт. 126) градусъ дуги, т. е. 360 часть окружности и *LOM* угловой градусъ. Если положимъ, что дуга *AB* содержитъ m^{0}, означая чрезъ m какое-нибудь число цѣлое или дробное, то $AB = m.\ LM$. Но, по § 90: $\frac{AOB}{LOM} = \frac{AB}{LM} = m$, и такъ какъ уголъ *LOM* принимается за единицу, то $AOB = m$. Это значитъ, что *всякій центральный уголъ содержитъ столько угловыхъ единицъ, сколько соотвѣтствующая ему дуга содержитъ дуговыхъ единицъ*. Это предложеніе выражается и такъ: *центральный уголъ измѣряется соотвѣтственною дугою* или *уголъ равенъ своей дугѣ*. Употребляя то или другое выраженіе, нужно помнить, что ими высказывается только то, что отвлеченныя числа, выражающія отношенія центральнаго угла къ его единицѣ и соотвѣтственной дуги къ ея единицѣ, равны между собою.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что прямой уголъ измѣряется четвертью окружности.

§ 92. Для измѣренія угловъ, начерченныхъ на бумагѣ, употребляется снарядъ (черт. 127) называемый *транспортиромъ*, представляющимъ полукругъ, раздѣленный на градусы, дѣленія нумерованы какъ по направленію *AMB*, такъ и по направленію *BMA*. Для измѣренія какого нибудь угла *AOM*, накладываютъ на него транспортиръ такъ, чтобы центръ его *O* совпалъ съ вершиною а діаметръ *AB* съ одной изъ сторонъ угла. Отмѣтивъ затѣмъ точку *M*, въ которой другая сторона угла пересѣкаетъ транспортиръ, отсчитываютъ число градусовъ между точками *A* и *M*.



Черт. 127.

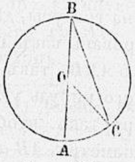


Черт. 128.

Для измѣренія угловъ на поверхности земли употребляется приборъ (черт. 128) называемый *Астролябіей*. Она состоитъ изъ круга $ACBD$, раздѣленнаго на градусы, который устанавливается въ горизонтальномъ положеніи на трехъ ножкахъ L, M и N. Каждый изъ концовъ діаметра CD снабженъ продольнымъ прорѣзомъ, въ которомъ натянута тонкая нить. Къ центру круга прикрѣплена линейка AB, свободно вращающаяся по кругу около его центра и также снабженная на концахъ продольными прорѣзами съ натянутыми нитями; эта линейка называется *алидадою*.(*)

Чтобы измѣрить помощію астролябіи какой нибудь уголъ устанавливаютъ астролябію такъ, чтобы центръ круга совпалъ съ вершиною угла и діаметръ CD съ одной изъ сторонъ его; совпаденіе діаметра CD съ стороною угла производится тѣмъ, что кругъ устанавливается такимъ образомъ, чтобы нити натянутыя въ точкахъ C и D и какая-нибудь точка разсматриваемой стороны были видимы по одной прямой линіи. Направивъ затѣмъ алидаду AB по другой сторонѣ угла, отсчитываютъ по кругу число градусовъ между точками A и C.

§ 93. ТЕОРЕМА. *Всякій вписанный уголъ равенъ половинѣ центральнаго угла, опирающагося на ту же дугу.*



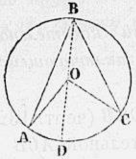
Черт. 129.

При доказательствѣ этой теоремы различаемъ 3 случая.

1-й случай: Положимъ, что вписанный уголъ ABC (черт. 129) составленъ изъ діаметра AB и хорды BC; требуется доказать, что $ABC=\frac{AOC}{2}$.

(*) На кругѣ обыкновенно помѣщается еще кромѣ того *бусола*.

Доказ. По § 40 слѣдств. 1 имѣемъ $AOC=OBC+OCB$; но такъ какъ въ треугольникѣ OBC стороны OB и OC, какъ радіусы, равны, то $OCB=OBC$ (§ 16); слѣдов. $AOC=2OBC$, или $ABC=\frac{AOC}{2}$.

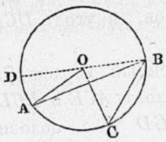


Черт. 130.

2-й случай: Положимъ, что вписанный уголъ ABC (черт. 130) составленъ изъ двухъ хордъ AB и BC, между которыми находится центръ; требуется доказать, что

$$ABC=\frac{AOC}{2},$$

Доказ. Проведя діаметръ BOD, находимъ, по предъидущему: $ABD=\frac{AOD}{2}$ и $CBD=\frac{COD}{2}$; складывая эти равенства, находимъ $ABD+CBD=\frac{AOD+COD}{2}$ или $ABC=\frac{AOC}{2}$.



Черт. 131.

3-й случай: Положимъ, что вписанный уголъ ABC (черт. 131) составленъ изъ двухъ хордъ AB и BC, между которыми не содержится центръ O; требуется доказать, что $ABC=\frac{AOC}{2}$.

Доказ. Проведя діаметръ DOB, находимъ, по предъидущему: $DBC=\frac{DOC}{2}$ и $DBA=\frac{DOA}{2}$; вычитая второе равенство изъ перваго, находимъ

$$DBC-DBA=\frac{DOC-DOA}{2}, \text{ или } ABC=\frac{AOC}{2}.$$

И такъ, при всѣхъ возможныхъ положеніяхъ вписанный уголъ равенъ половинѣ центральнаго угла, опирающагося на ту же дугу.

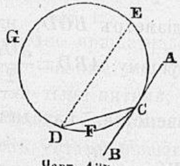
Изъ этого предложенія слѣдуетъ:

1) Всякій вписанный уголъ измѣряется половиной дуги, заключающейся между его сторонами.

2) Вписанные углы, опирающіеся на одну и ту же дугу, равны между собою.

3) Вписанный уголъ, опирающійся на діаметръ, будетъ прямой, потому что измѣряется половиною полуокружности т. е. четвертью окружности.

§ 94. Теорема. *Уголъ, составленный касательной и хордою, измѣряется половиной дуги, заключающейся между этими линіями.*



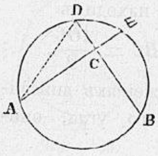
Черт. 132.

Положимъ, что уголъ DCB (черт. 132) составленъ изъ касательной ACB и хорды CD; требуетъ доказать, что уголъ DCB измѣряется половиной дуги DFC.

Доказ. Проведя хорду DE параллельно касательной AB, замѣтимъ, что уголъ DCB равенъ углу EDC (§ 35), и дуга DC равна дугѣ CE (§ 87); но уголъ EDC измѣряется половиной дуги EC, или половиной дуги DC, слѣдов. и уголъ DCB измѣряется половиной дуги DC.

Очевидно, что уголъ ACD, составленный хордою CD и касательной CA, равняясь суммѣ угловъ ACE и ECD, измѣряется полусуммою дугъ CE и EGD т. е. половиной дуги EGD, заключающейся между его сторонами.

§ 95, Теорема. *Уголъ, котораго вершина находится внутри круга, измѣряется полусуммою дугъ, заключающихся между его сторонами и ихъ продолженіями.*

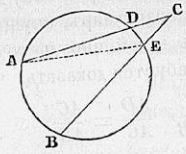


Черт. 133.

Положимъ, что ACB (черт. 133) есть уголъ, котораго вершина находится внутри круга, а CE и CD суть продолженія сторонъ его; требуется доказать, что мѣра угла ACB есть $\frac{AB+DE}{2}$.

Доказ. Соединивъ точки A и D, находимъ: $\angle ACB = \angle ADC + \angle DAC$ (§ 40 слѣд. 1). Но уголъ ADB измѣряется половиной дуги AB (§ 93 слѣд. 1), а уголъ DAE — половиной дуги DE; слѣд. уголъ ACB измѣряется полусуммою дугъ AB и DE.

§ 96. Теорема. *Уголъ, котораго вершина находится внѣ круга, измѣряется полуразностью дугъ, заключающихся между его сторонами.*

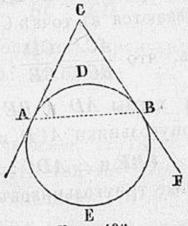


Черт. 134.

Положимъ, что вершина угла ACB (черт. 134) находится внѣ круга; требуется доказать, что мѣра угла ACB есть $\frac{AB-DE}{2}$.

Доказ. Соединивъ точки A и E, находимъ: $ACB = AEB - CAE$ (§ 40 слѣдств. 1); но уголъ AEB измѣряется половиной дуги AB, а уголъ CAE — половиной дуги DE (§ 93 слѣдств. 1); слѣдов. уголъ ACB измѣряется полуразностью дугъ AB и DE.

§ 97. Теорема. *Описанный уголъ измѣряется полуразностью дугъ, заключающихся между его сторонами.*



Черт. 135.

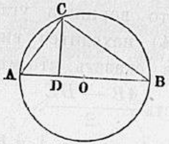
Положимъ, что линіи CA и CB (черт. 135) суть касательныя къ кругу; требуется доказать, что мѣра угла ACB есть $\frac{AEB-ADB}{2}$.

Доказ. Соединивъ точки A и B, находимъ: $ACB = ABF - CAB$; но уголъ ABF измѣряется половиной дуги AEB и уголъ CAB половиной дуги ADB; слѣдов. уголъ ACB измѣряется полуразностью дугъ AEB и ADB.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что описанные углы, содержащіе равныя дуги, равны между собою.

Пропорціональныя линіи въ кругѣ.

§ 98. Теорема. *Перпендикуляръ, опущенный изъ какой нибудь точки окружности на діаметръ, есть средняя пропорціональная между отрѣзками діаметра, а хорда, проведенная отъ той же точки къ концу діаметра, есть средняя пропорціональная между діаметромъ и прилежащимъ отрѣзкомъ.*



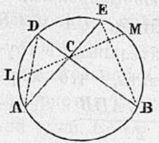
Черт. 136.

Пусть будетъ AB (черт. 136) діаметръ и CD перпендикуляръ, опущенный на него изъ какой нибудь точки окружности; требуется доказать, что

$$\frac{AD}{DC}=\frac{DC}{DB},\quad \frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}.$$

Доказ. Соединивъ точки C и B и замѣтивъ, что ACB есть прямой уголъ (§ 93 слѣдств. 3), находимъ (§ 57): $\frac{AD}{DC}=\frac{DC}{DB}$ и $\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$.

§ 99. Теорема. *Двѣ хорды, пересѣкающіяся внутри круга, дѣлятся на части обратно пропорціональныя.*



Черт. 237.

Положимъ, что хорды AE и DB (черт. 137) пересѣкаются въ точкѣ C; требуется доказать, что $\frac{AC}{BC}=\frac{CD}{CE}$.

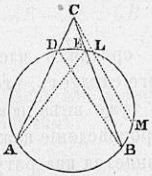
Доказ. Проведя хорды AD и BE, замѣтимъ, что треугольники ACD и BCE подобны, потому что $\angle DAC=\angle CBE$ и $\angle ADC=\angle CEB$ (§ 93 слѣд. 2). Изъ подобія же треугольниковъ слѣдуетъ: $\frac{AC}{BC}=\frac{CD}{CE}$.

Составивъ произведеніе среднихъ и крайнихъ членовъ, находимъ:

$$AC.\ CE=CD.\ BC.$$

Очевидно, что всякая другая хорда LM, проходящая чрезъ точку C, дѣлится на два отрѣзка LC и CM, которыхъ произведеніе $LC.\ CM$ также равняется произведенію $AC.\ CE$. Это значитъ, что всѣ хорды, проходящія чрезъ одну и туже внутреннюю точку, дѣлятся въ этой точкѣ такъ, что произведенія отрѣзковъ каждой хорды есть величина постоянная.

§ 100. Теорема. *Двѣ сѣкущія, проведенныя отъ точки лежащей внѣ окружности, обратно пропорціональны ихъ внѣшнимъ частямъ.*



Черт. 138.

Положимъ, что изъ точки C проведены сѣкущія CA и CB (черт. 138); требуется доказать, что $\frac{AC}{BC}=\frac{CE}{CD}$.

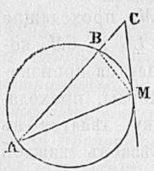
Доказ. Проведя хорды AE и DB, замѣтимъ, что треугольники ACE и BCD подобны, потому что имѣютъ общій уголъ C и, кромѣ того, (§ 93 слѣд. 2) $\angle DAE=\angle DBE$. Изъ подобія треугольниковъ слѣдуетъ $\frac{AC}{BC}=\frac{CE}{CD}$.

Составивъ произведеніе среднихъ и крайнихъ членовъ, находимъ:

$$AC.\ CD=BC.\ CE.$$

Очевидно, что всякая другая сѣкущая CM, проведенная отъ той же точки C, даетъ также $MC.\ LC=AC.\ CD$. Это значитъ, что всѣ сѣкущія, проходящія чрезъ одну и туже внѣшнюю точку, дѣлятся окружностью такъ, что произведеніе каждой сѣкущей на внѣшнюю ея часть, есть величина постоянная.

§ 101. Теорема. *Касательная есть средняя пропорціональная между всею сѣкущею и внѣшнею частію ея,*



Черт. 139.

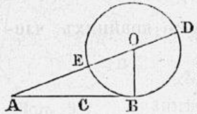
Положимъ, что изъ точки C (черт. 139) проведены: касательная CM и сѣкущая CA; требуется доказать, что $\frac{AC}{CM}=\frac{CM}{CB}$.

Доказ. Проведя хорды AM и BM, замѣтимъ, что треугольники ACM и BCM имѣютъ общій уголъ C, и что углы BAM и BMC, имѣющіе одну и туже мѣру $\frac{BM}{2}$ (§ 94), равны; слѣдов. эти треугольники подобны, и потому

$$\frac{AC}{CM}=\frac{CM}{CB}.$$

Составивъ произведеніе крайнихъ и среднихъ членовъ, находимъ: $AC.\,CB = CM^2$. Изъ этого слѣдуетъ, что всѣ сѣкущія, проходящія чрезъ одну и туже внѣшнюю точку, дѣлятся окружностью такъ, что произведеніе каждой сѣкущей на внѣшнюю ея часть равняется квадрату касательной, проведенной изъ той же точки.

§ 102. ЗАДАЧА. *Раздѣлить линію* ***AB*** (черт. 140) *въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.*



Черт. 140.

Рѣшеніе. Раздѣлить линію въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, значитъ раздѣлить ее на такія двѣ части, чтобы бо́льшая часть была среднею пропорціональною между всею линіею и мѐньшею частью. (*)

(*) Раздѣленіе линіи на двѣ части, изъ которыхъ бо́льшая часть есть средняя пропорціональныя между всею линіею и мѐньшею частью, названо Эвклидомъ: *дѣленіемъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.* Это дѣленіе называется также sectio divina а иногда и sectio aurea; поводомъ къ первому названію послужила, вѣроятно, замѣчательная книга монаха Luca Pacioli, подъ заглавіемъ: Divina proportione... (1509).

Возставляя въ точкѣ B перпендикуляръ къ линіи AB, отложимъ на немъ часть $OB=\frac{AB}{2}$, и изъ точки O опишемъ кругъ радіусомъ равнымъ OB. Соединивъ затѣмъ центръ круга съ точкою A, отложимъ на линіи AB часть $AC = AE$; тогда линія AB раздѣлится въ точкѣ C въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Въ самомъ дѣлѣ, по предъидущему §. $\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AE}$ и отсюда находимъ: $\frac{AD-AB}{AB}=\frac{AB-AE}{AE}$. Но такъ какъ $AD-AB=AE=AC$ и $AB-AE=CB$ то:

$$\frac{AC}{AB}=\frac{CB}{AC}$$

Если же переставимъ крайніе и средніе члены, то получимъ:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{CB}.$$

Вписанные и описанные многоугольники.

Черт. 141.

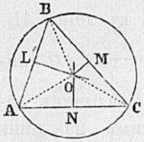
Черт. 142.

§ 103. Многоугольникъ называется *вписаннымъ въ кругъ*, когда всѣ углы его суть углы вписанные (§ 88), (черт. 141), и *описаннымъ около круга*, — когда всѣ углы его суть углы описанные (§ 88) (черт. 142).

Кругъ, въ которомъ вписанъ многоугольникъ, называется *описаннымъ кругомъ* (черт. 141), а кругъ, около котораго описанъ многоугольникъ—*вписаннымъ кругомъ* (чер. 142).

Очевидно, что стороны описаннаго многоугольника суть касательныя къ окружности.

§ 104. ТЕОРЕМА. *Около всякаго треугольника можно описать кругъ.*



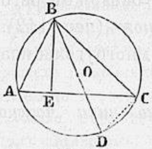
Черт. 143.

Доказ. Раздѣливъ двѣ стороны AB и BC (черт. 143) треугольника ABC пополамъ, возставимъ въ срединѣ ихъ L и M перпендикуляры, и отъ точки пересѣченія ихъ O проведемъ прямыя OA, OB и OC; прямоугольные треугольники AOL и BOL имѣютъ общій катетъ OL и, по построенію, $AL = LB$, слѣдов. они равны (§ 23), и потому $AO = OB$; также прямоугольные треугольники BOM и COM, имѣющіе общій катетъ OM и $BM=MC$, равны; и потому $BO=OC$. Изъ этого слѣдуетъ, что окружность, описанная изъ точки O радіусомъ OA, пройдетъ чрезъ всѣ три вершины треугольника ABC.

Итакъ центръ круга, описаннаго около треугольника, находится въ точкѣ пересѣченія перпендикуляровъ, возставленныхъ въ срединѣ двухъ сторонъ его.

Очевидно, что около треугольника можно описать только одну окружность, потому что центръ описанной окружности долженъ находиться въ точкѣ пересѣченія перпендикуляровъ LO и MO.

Соединивъ точку O (черт. 143) съ срединою N стороны AC, находимъ, что треугольники AON и CON, имѣющіе общую сторону ON, кромѣ того, $AN = NC$, и по доказанному, $AO = OC$, равны (§ 20), слѣд. $\angle ANO = \angle CNO$, т. е. линія ON перпендикулярна къ AC. Изъ этого слѣдуетъ, что перпендикуляръ, возставленный, къ срединѣ стороны AC, проходитъ чрезъ точку O; слѣдов. *всѣ три перпендикуляра, возставленные изъ средины трехъ сторонъ треугольника, сходятся въ одну точку.*

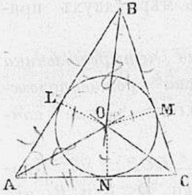


Черт. 144.

Положимъ, что O есть центръ круга, описаннаго около треугольника ABC (черт. 144); проведемъ діаметръ BD и линію BE перпендикулярно къ сторонѣ AC, наконецъ соединимъ точки D и C. Уголъ BCD, опирающійся на діаметръ

BD, есть прямой, кромѣ того, углы BAE и BDC, опирающіеся на одну и туже дугу BC, равны (§ 93 слѣдст. 2), слѣдов. прямоугольные треугольники ABE и DBC подобны, и потому $\frac{AB}{BD} = \frac{BE}{BC}$. Означимъ радіусъ описаннаго круга чрезъ R, такъ что $BD = 2R$, и положимъ $BC = a$, $AB = c$, наконецъ пусть будетъ высота BE треугольника h, тогда предъидущая пропорція принимаетъ видъ: $\frac{c}{2R} = \frac{h}{a}$, и отсюда $R = \frac{ac}{2\,h}$; т. е. радіусъ круга, описаннаго около треугольника, равенъ произведенію двухъ сторонъ треугольника, дѣленному на двойную высоту его.

§ 105. Теореа. *Во всякій треугольникъ можно вписать кругъ.*



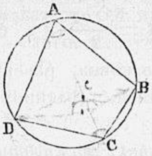
Черт. 145.

Доказ. Раздѣливъ два угла A и B треугольника ABC (черт. 145) линіями AO и BO пополамъ, опускаемъ изъ точки ихъ пересѣченія O перпендикуляры OL, OM и ON на стороны треугольника. Прямоугольные треугольники AON и AOL имѣютъ общую гипотенузу, и по построенію: $\angle LAO = \angle NAO$, слѣдов. они равны (§ 24), и потому $ON = OL$. Также прямоугольные треугольники LOB и MOB, имѣющіе общую гипотенузу OB и $\angle LBO=\angle MBO$ равны, и потому $LO = OM$. Изъ этого слѣдуетъ, что окружность, описанная изъ точки O радіусомъ OL, будетъ касаться всѣхъ трехъ сторонъ треугольника.

Итакъ центръ круга, вписаннаго въ треугольникъ, находится въ точкѣ пересѣченія линій, дѣлящихъ два угла треугольника пополамъ.

Если соединимъ точку O съ третьею вершиною C, то прямоугольные треугольники NOC и MOC, имѣющіе общую гипотенузу OC, и, по доказанному, $ON = OM$, будутъ равны (§ 25); слѣдов. $\angle NCO = \angle MCO$. Изъ этого слѣдуетъ, что линія, дѣлящая третій уголъ треугольника пополамъ, проходитъ чрезъ точку O, такъ что *всѣ три линіи, дѣлящія три угла треугольника пополамъ, сходятся въ одну точку.*

§ 106. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ вписанномъ четыреугольникѣ сумма противуположныхъ его угловъ равна двумъ прямымъ.*



Черт. 146.

Положимъ, что $ABCD$ (черт. 146) есть вписанный четыреугольникъ; требуется доказать, что $\angle DAB + \angle DCB = 2d$.

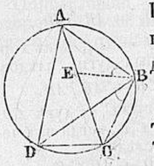
Доказ. Такъ какъ уголъ DAB измѣряется половиной дуги DCB (§ 93 слѣд. 1), а уголъ—DCB половиной дуги DAB, то сумма угловъ DAB и DCB измѣряется полусуммою дугъ DAB и DCB, т. е. полуокружностью, а полуокружность есть мѣра двухъ прямыхъ угловъ.

Обратная теорема. Около всякаго четыреугольника $ABCD$ (черт. 146), въ которомъ сумма противуположныхъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ, можно описать окружность.

Доказ. Положимъ, что $\angle DAB + \angle DCB = 2d$. Проведемъ окружность чрезъ три точки D, A и B; эта окружность пройдетъ необходимо и чрезъ точку C, потому что, еслибы точка C лежала внутри этого круга, то сумма угловъ A и C была бы болѣе $2d$, что противно положенію; если же точка C лежала бы внѣ этого круга, то сумма угловъ A и C была бы менѣе $2d$, что также противно положенію.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что около всякаго прямоугольника можно описать кругъ.

§ 107. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ вписанномъ четыреугольникѣ произведеніе діагоналей равно суммѣ произведеній противуположныхъ сторонъ.*



Черт. 147.

Положимъ, что $ABCD$ (черт 147) есть вписанный четыреугольникъ; требуется доказать, что (*)

$$BD.\ AC = AB.\ DC + AD.\ BC.$$

Доказ. Отложимъ $\angle ABE = \angle DBC$, тогда треугольники ABE и DBC подобны, потому что имѣютъ $\angle ABE = \angle DBC$, по построенію, и $\angle BAE = \angle BDC$, какъ углы опирающіеся на одну и туже дугу BC, слѣд. $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AE}$, или:

$$BD.\ AE = AB.\ DC.$$

Далѣе, если къ равнымъ угламъ ABE и DBC прибавимъ по углу EBD, то получимъ равные углы ABD и EBC, а какъ углы BCA и BDA опираются на одну и ту же дугу AB, то они равны, и потому треугольники EBC и ABD подобны; слѣдов. $\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{EC}$, или:

$$BD.\ EC = AD\ BC.$$

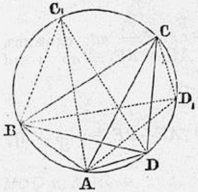
Сложивъ полученныя два уравненія, находимъ:

$$BD\ (AE + EC) = AB.\ DC + AD.\ BC,$$

и такъ какъ $AE + EC = AC$, то

$$BD.\ AC = AB.\ DC + AD.\ BC.$$

§ 108. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ вписанномъ четыреугольникѣ діагонали относятся какъ суммы произведеній сторонъ, сходящихся въ концахъ діагоналей.*



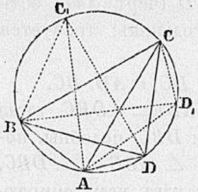
Черт, 148.

Пусть будетъ $ABCD$ (черт. 148) вписанный четыреугольникъ; требуется доказать, что

$$\frac{AC}{BD} = \frac{BC.\ CD + AB.\ AD}{AB.\ BC + AD.\ CD}$$

Док. Отложивъ дугу CD_1=дугѣ AD и проведя линіи D_1B и CD_1, составимъ четыреугольникъ $ABCD_1$ въ которомъ (§ 106):

(*) Это замѣчательное предложеніе называется *Птоломеевой теоремою*, потому что оно встрѣчается въ первый разъ въ сочиненіи *Птоломея* (во второмъ столѣт. п. Р. Х.), извѣстномъ въ наукѣ подъ заглавіемъ *Алмагестъ* (Μεγαλη συνταξισ).



Черт. 148.

$$AC.\,BD_1 = BC\,.\,AD_1 + AB\,.\,CD_1.$$

Но $CD_1 = AD$ и $CD = AD_1$, какъ хорды стягивающія равныя дуги, слѣдов

$$AC\,.\,BD_1 = BC\,.\,CD + AB\,.\,AD.$$

Далѣе, отложивъ дугу $BC_1 =$ дугѣ CD, проведемъ линіи C_1B и C_1D, тогда изъ четыреугольника $AB\,C_1D$ слѣдуетъ:

$$BD.\,C_1A = AB.\ C_1D + AD.\,C_1B.$$

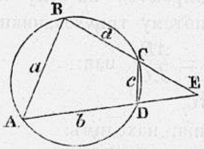
Но $C_1B = CD_1$, $C_1A = BD_1$ и $BC = C_1D$, какъ хорды, стягивающія равныя дуги; слѣдов.

$$BD\ .\ BD_1 = AB\,.\,BC + AD\ .\ CD.$$

Раздѣливъ первое уравненіе на второе, находимъ

$$\frac{AC}{BD} = \frac{BC\,.\,CD + AB\,.\,AD}{AB\,.\,BC + AD\,.\,CD}.$$

§ 109. Задача. *По четыремъ даннымъ линіямъ a, b, c и $д$ построить четыреугольникъ, около котораго можно описать кругъ.*



Черт. 149.

Рѣшеніе Положимъ, что a есть наибольшая изъ данныхъ линій и пусть будетъ $ABCD$ (черт. 149) искомый четыреугольникъ: $AB = a$; $AD = b$; $DC = c$ и $BC = d$. Продолживъ стороны AD и BC до пересѣченія, замѣтимъ, что треугольники ABE и DCE подобны, потому что имѣютъ общій уголъ E, и кромѣ того равные углы DCE и DAB, такъ какъ каждый изъ нихъ вмѣстѣ съ угломъ DCB составляетъ $2d$ Изъ подобія этихъ треугольниковъ слѣдуетъ:

$$\frac{a}{c} = \frac{BE}{DE} = \frac{BE}{AE - b}\ ;\ \frac{a}{c} = \frac{AE}{CE} = \frac{AE}{BE - d}.$$ Изъ двухъ пропорцій:

$$\frac{a}{c} = \frac{BE}{AE - d} \text{ и } \frac{a}{c} = \frac{AE}{BE - d}$$

находимъ $a\,.\,AE - c.BE = ad$, и $a.\,BE - c.\,AE = ad$; сложивъ эти два уравненія, получаемъ: $(a - c.\ AE + BE) = ab + ad$ и отсюда

$$AE + BE = \frac{a\,(b + d)}{a - c}$$

Разность тѣхъ же уравненій даетъ $(a+c)\ (AE - BE) = a\ (b - d)$; отсюда

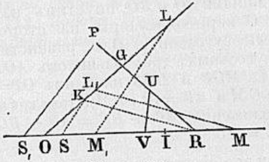
$$AE - BE = \frac{a\,(b - d)}{a + c}$$

Изъ суммы и разности двухъ линій AE и BE, находимъ:

$$AE = \frac{a\ (b + d)}{2\ (a - c} + \frac{a\ \ b - d)}{2\ (a + c}$$

$$BE = \frac{a\ (b + d)}{2\ (a - c)} - \frac{a\ (b - d)}{2\ (a + c}.$$

Опредѣливши AE и BE, построимъ треугольникъ изъ трехъ сторонъ AB, AE и BE, и отложимъ затѣмъ на сторонахъ BE и AE части d и b. Чтобы построить этотъ треугольникъ беремъ какой нибудь уголъ LOM (черт. 150), отложимъ на сторонахъ его $OG = a$, $GL = GL_1 = c$; $OI = b$; $IM = IM_1 = d$, и проведемъ линіи L_1M и LM_1. Положимъ, что K есть средина OG. Проведя $KR \parallel L_1M$ и $KS \parallel LM_1$, имѣемъ $\dfrac{OM}{OR} = \dfrac{OL_1}{OK}$, или $\dfrac{b + d}{OR} = \dfrac{a - c}{{}^1/_2\,a}$; слѣдоват. $OR = \dfrac{a\ (b + d)}{2\ (a - c}$. Далѣе $\dfrac{OS}{OM_1} = \dfrac{OK}{OL}$, или $\dfrac{OS}{b - d} = \dfrac{{}^1/_2\,a}{a + c}$, слѣдов. $OS = \dfrac{a\ (b - d)}{2\ (a + c)}$.



Черт. 150.

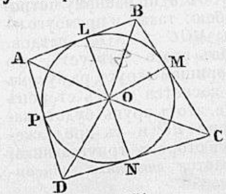
Если же сдѣлаемъ $OS_1 = OS$, то

$$S_1R = \frac{a\,(b + d)}{2\ (a - c)} + \frac{a\ \ b - d)}{2\ (a + c)}.$$

$$SR = \frac{a\ (b + d)}{2\ (a - c)} - \frac{a\ (b - d)}{2\ (a + c)}$$

Описавъ изъ точки S_1 радіусомъ OG, и изъ точки R радіусомъ SR дуги, соединимъ точку ихъ пересѣченія P съ точками S_1 и R, тогда S_1PR будетъ искомый треугольникъ. Наконецъ если сдѣлаемъ $S_1V = b$ и $PU = d$, то S_1PUV будетъ искомый четыреугольникъ.

§ 110. Теорема. *Во всякомъ описанномъ четыреугольникѣ суммы противуположныхъ сторонъ равны.*



Черт. 151.

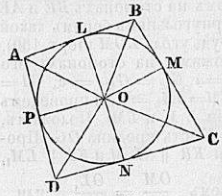
Положимъ, что $ABCD$ (черт. 151) есть описанный четыреугольникъ; требуется доказать, что $AB + CD = BC + AD$.

Доказ. Соединимъ центръ O съ вершинами четыреугольника, и опустимъ изъ центра перпендикуляры на стороны его. Прямоугольные треугольники LOB и MOB, имѣющіе общую гипотенузу и по равному катету, равны; также и треугольники MOC и NOC, и т д. Изъ равенства треугольниковъ слѣдуетъ:

$$LB = BM;\ NC = MC;\ ND = DP \text{ и } AL = AP.$$

Сложивъ эти равенства, находимъ: $AB + CD = BC + AD$.

Обратная теорема. Во всякій четыреугольникъ, въ которомъ суммы противуположныхъ сторонъ равны, можно вписать кругъ.



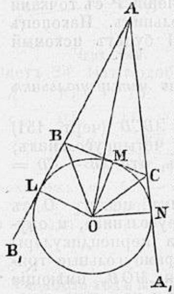
Черт, 151.

Доказ. Положимъ, что $ABCD$ (черт. 151) есть четыреугольникъ, въ которомъ $AB+CD=AD+BC$. Раздѣливъ два угла его A и B пополамъ линіями AO и BO, опустимъ изъ точки O перпендикуляры на стороны четыреугольника. Изъ равенства прямоугольныхъ треугольниковъ AOP и AOL, MOB и LOB находимъ $OP=OL=OM$ и $AB=AP+BM$; и такъ какъ, по положенію, $AB+DC=AD+BC$, то $DC=PD+MC$.

Если вообразимъ, что треугольникъ OPD приложенъ къ треугольнику MOC такъ, чтобы сторона OP совпала съ OM, а сторона PD была продолженіемъ стороны MC, то получимъ треугольникъ, котораго всѣ стороны соотвѣтственно равны сторонамъ треугольника DOC; слѣдов. эти треугольники будутъ равны, и потому $ON=OM$ (§ 24 слѣдс.). Изъ этого слѣдуетъ, что кругъ, описанный изъ точки O радіусомъ OL, коснется всѣхъ четырехъ сторонъ четыреугольника.

Очевидно, что линіи OC и OD дѣлятъ углы C и D пополамъ; слѣд. *въ четыреугольникѣ, въ которомъ суммы противуположныхъ сторонъ равны, линіи, дѣлящія его углы пополамъ, сходятся въ одну точку.*

§ 111. Продолжимъ стороны AB и AC треугольника ABC (черт. 152) и раздѣлимъ пополамъ внѣшніе углы его CBB_1 и BCA_1; изъ точки пересѣченія O линій, дѣлящихъ эти углы пополамъ, опускаемъ перпендикуляры OL, OM и ON на стороны треугольника; тогда прямоугольные треугольники BOM и BOL, имѣющіе общую гипотенузу OB и по равному острому углу, равны собою; также и прямоугольные треугольники MOC и NOC; слѣдов. $OL=OM=ON$. Изъ этого слѣдуетъ, что если изъ точки O опишемъ кругъ радіусомъ OL, то этотъ кругъ коснется трехъ сторонъ B_1B; BC и CA_1, т. е. этотъ кругъ будетъ касательный къ сторонѣ BC и къ продолженіямъ двухъ другихъ сторонъ треугольника. Такой кругъ называется *внѣшнимъ вписаннымъ кругомъ.*

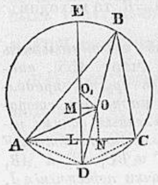


Черт. 152.

Очевидно, что всякій треугольникъ имѣетъ три внѣшнихъ вписанныхъ круга, соотвѣтствующихъ тремъ сторонамъ его.

Соединивъ точки A и O, замѣтимъ, что прямоугольные треугольники AON и AOL, имѣющіе общую гипотенузу AO и равные катеты ON и OL, равны; слѣдов. $\angle BAO=\angle CAO$, т. е. линія AO дѣлитъ уголъ A пополамъ. Такъ какъ центръ внутренняго вписаннаго круга находится также на линіи AO, дѣлящей уголъ треугольника пополамъ (§ 105), то изъ сказаннаго слѣдуетъ: *центръ внутренняго вписаннаго круга, центръ внѣшняго вписаннаго круга и противуположная вершина треугольника лежатъ на одной прямой линіи.*

§ 112. *Задача. Опредѣлить разстояніе центра описаннаго около треугольника круга отъ центра вписаннаго въ него круга.*



Черт. 153.

Рѣшеніе. Пусть будетъ O_1 (черт. 153) центръ круга описаннаго около треугольника ABC и R его радіусъ, O центръ круга вписаннаго и r его радіусъ; требуется опредѣлить длину линіи O_1O, которую означимъ чрезъ d.

Соединивъ точки B и O, продолжимъ линію BO до пересѣченія съ описаннымъ кругомъ, и соединимъ точки O_1 и D. Такъ какъ линія BD дѣлитъ уголъ ABC пополамъ, то $AD=DC$, и потому радіусъ O_1D перпендикуляренъ къ сторонѣ AC.

Доказавъ это, опустимъ изъ точки O перпендикуляръ на линію O_1D, находимъ (§ 59):

$$d^2=O_1O^2=O_1D^2+OD^2-2\,O_1D.DM.$$

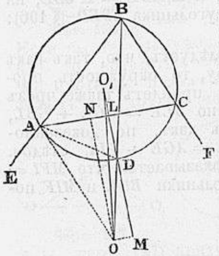
Въ треугольникѣ AOB уголъ $AOD=\angle ABO+\angle BAO$; кромѣ того $\angle OAD=\angle OAC+\angle CAD$, и такъ какъ AO и BO дѣлятъ углы A и B пополамъ, то $\angle BAO=\angle OAC$ и $\angle ABO=\angle DBC=\angle CAD$; слѣдов. $\angle AOD=\angle OAD$, и потому $OD=AD$. Замѣтивъ притомъ, что $OD^2=AD^2=ED.DL=2\,O_1D.DL$, находимъ $d^2=O_1D^2+2O_1D.DL-2O_1D.\ DM=O_1D^2-2\,O_1D.(DM-LD)$.

Опустивъ изъ точки O перпендикуляръ на сторону AC и замѣтивъ, что $ON=r=MD-DL$ и $O_1D=R$, находимъ:

$$d^2=R^2-2\,R\,r.$$

§ 113. *Задача. Опредѣлить разстояніе центра круга описаннаго около треугольника отъ центра внѣшняго вписаннаго круга.*

Рѣшеніе. Пусть будетъ O_1 (черт. 154) центръ круга, описаннаго около треугольника ABC, R его радіусъ, O центръ внѣшняго вписаннаго круга и ρ его радіусъ; требуется опредѣлить длину линіи O_1O, которую означимъ чрезъ d.



Черт. 154.

Соединимъ точки B и O, также точки D и O_1. Такъ какъ линія BO дѣлитъ уголъ ABC пополамъ (§ 111), то $AD=DC$, и потому радіусъ O_1D перпендикуляренъ къ сторонѣ AC.

Далѣе замѣтимъ, что въ треугольникѣ ABO уголъ $AOD=\angle EAO-\angle EBO$; кромѣ того $\angle DAO=\angle OAC-\angle CAD$, и такъ какъ BO и AO дѣлятъ углы B и EAC пополамъ, то $\angle EAO=\angle OAC$ и $\angle EBO=\angle DBC=\angle CAD$; слѣдоват. $\angle AOD=\angle DAO$, и потому $DO=AD$.

Доказавъ это, опустимъ изъ точки O перпендикуляръ на предложеніе стороны O_1D, находимъ изъ $\triangle\ O_1OD$ (§ 60):

$$d^2 = OO_1^2 = O_1D^2 + OD^2 + 2O_1D.\ DM.$$

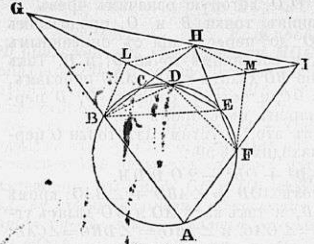
Но $OD = AD$ и $AD^2 = 2O_1D.\ LD$, слѣд

$$d^2 = O_1D^2 + 2O_1D.LD + 2O_1D.DM = O_1D^2 + 2O_1D\,(LD+DM).$$

Если изъ точки O опустимъ перпендикуляръ ON на сторону AC и замѣтимъ, что $ON = \rho = LD + DM$, и $O_1D=R$, то находимъ:

$$d^2 = R^2 + 2R\rho.$$

§ **114.** *Паскалевъ шестиугольникъ. Если въ шестиугольникъ* $ABCDEF$ (черт. 155), *вписанномъ въ кругѣ, продолжить по парно двѣ стороны, раздѣленныя однимъ угломъ, а именно стороны* AF *и* CD, EF *и* BC, ED *и* AB, *то при точки пересѣченія* I, H *и* G *лежатъ на одной прямой линіи.* *)



Черт. 155.

Доказ. По § 96 уголъ AGE измѣряется дугою $\dfrac{AF+FE-BC-CD}{2}$, а уголъ CIA измѣряется дугой $\dfrac{CB + AB - DE - EF}{2}$; слѣдов. $\angle AGE + \angle CIA$ измѣряются дугою $\dfrac{AF + AB - CD - DE}{2}$, а это дуга есть мѣра угла BHF; слѣдов. $\angle BHF = \angle AGE + \angle CIA$.

Проведя изъ точки H линію $HL \parallel IC$ и линію $HM \parallel GE$, и соединивъ точки L и B и точки M и F, находимъ: $\angle HLE = \angle MDE$, какъ углы соотвѣтственные, и $\angle MDE = \angle CBE$, на основаніи свойства вписаннаго четыреугольника $CBED$ (§ 106); слѣдов. $\angle HLE = \angle CBE$.

Изъ равенства угловъ HLE и CBE слѣдуетъ, что, такъ какъ эти углы должны имѣть одинакую мѣру, то окружность, проходящая чрезъ три точки B, E и H, пройдетъ также чрезъ точку L, и потому $\angle BHE = \angle BLE$; но $BLE = BGL + GBL$, слѣдов. $BHE = BGL + GBL$; но такъ какъ, по доказанному, $BHE = AGE + CIA$, то $BGL + GBL = AGE + CIA$, слѣдов. $GBL = CIA$. Подобнымъ же образомъ доказывается, что $MFI = BGL$. Изъ этого слѣдуетъ, что триугольники BGL и MIF подобны, и потому $\dfrac{GL}{MF} = \dfrac{LB}{MI}$.

---

*) Это предложеніе открыто шестнадцатилѣтнымъ Паскалемъ, и принято имъ въ основаніи теоріи коническихъ сѣченій; оно извѣстно въ наукѣ подъ именемъ *Паскалевъ мистическій шестиугольникъ* (Hexagrammum mysticum).

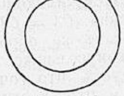
Если проведемъ линіи DB и DF, то, на основаніи свойства вписаннаго четыреугольника $BAFD$, углы GBD и AFD равны, и такъ какъ $GBD = GBL + LBD$ а $AFD = FDM + DIF$, то $GBL + LBD = FDM + DIF$. Замѣтивъ притомъ, что, по доказанному, $GBL = MIF$, находимъ: $LBD = FDM$, и такъ какъ, кромѣ того, по доказанному $BLD = DMF$, какъ внѣшніе углы подобныхъ триугольниковъ, то заключаемъ, что триугольники LBD и FDM подобны; слѣдов. $\dfrac{LD}{FM} = \dfrac{LB}{MD}$.

Если эту пропорцію раздѣлимъ на прежде найденную, то получимъ: $\dfrac{LD}{GL} = \dfrac{MI}{MD}$ или $\dfrac{LD + GL}{GL} = \dfrac{IM + MD}{MD}$, или наконецъ: $\dfrac{GD}{GL} = \dfrac{DI}{MD} = \dfrac{DI}{LH}$. Изъ этой пропорціи и изъ параллельности линій LH и DI слѣдуетъ (§ 54), что GHI есть прямая линія.

Если двѣ стороны шестиугольника, напр. CD и AF, были бы параллельны, то при продолженіи они не встрѣтились; въ этомъ случаѣ говорятъ, что точка ихъ пересѣченія находится на безконечномъ разстояніи; линія соединяющая двѣ другія точки пересѣченія G и H будетъ въ этомъ случаѣ параллельна линіямъ AF и CD. Если кромѣ одной пары еще и другая пара сторонъ параллельна, то и третья также параллельна.

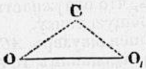
Относительное положеніе двухъ окружностей.

§ 115. Окружности, имѣющія общій центръ (черт. 156), называются *концентрическими*, окружности, неимѣющія общаго центра — *эксцентрическими*.

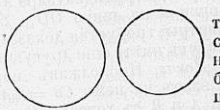


Черт. 156.

Двѣ окружности не могутъ пересѣкаться, когда суммы ихъ радіусовъ меньше разстоянія ихъ цетровъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ O и O_1 (черт. 157) центры двухъ окружностей, r и r_1 ихъ радіусы, и положимъ что $r + r_1 < OO_1$ Если бы эти окружности пересѣкались въ какой нибудь точкѣ C, то, вслѣдствіе $OC + O_1C > OO_1$, имѣли бы $r + r_1 > OO_1$, что противно положенію. Въ этомъ случаѣ одна окружность лежитъ внѣ другой (черт. 158).

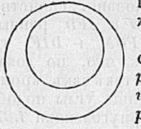


Черт. 157.



Черт 158.

Но двѣ окружности также не могутъ пересѣкаться, когда разность ихъ радіусовъ больше разстоянія ихъ центровъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ O и O_1 (черт. 157) центры двухъ окружностей, r и r_1 ихъ радіусы, и положимъ $r - r_1 > OO$. Если бы эти окружности пересѣкались въ какой нибудь точкѣ C, то, вслѣдствіе $OC - O_1C < OO_1$ (§ 13), имѣли бы: $r - r_1 < OO_1$, что противно



Черт. 159.

положенію. Въ этомъ случаѣ одна окружность лежитъ внутри другой (черт. 159).

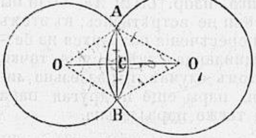
Изъ сказаннаго выводимъ условіе для пересѣченія двухъ окружностей: *двѣ окружности пересѣкаются только тогда, когда разстояніе ихъ центровъ меньше суммы и больше разности ихъ радіусовъ.*

Очевидно, что двѣ окружности могутъ пересѣкаться не болѣе какъ въ двухъ точкахъ, потому что если допустимъ, что двѣ пересѣкающіяся окружности имѣли бы три общихъ точки, то чрезъ три точки проходили бы двѣ различныя окружности, что противно § 104.

§ 116. Теорема. *Двѣ пересѣкающіяся окружности имѣютъ всегда двѣ общія точки.*

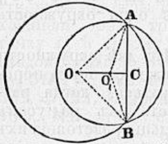
Разсмотримъ два случая.

1-й случай. Пусть будетъ A (черт. 160) точка пересѣченія двухъ окружностей; положимъ что центры O и O_1 такъ расположены, что перпендикуляръ AC, опущенный изъ точки A на линію OO_1, соединяющую оба центры, проходитъ между этими центрами; требуется доказать, что окружности будутъ имѣть еще другую общую точку.



Черт. 160.

Доказ. Продоливъ перпендикуляръ AC и взявъ на немъ $CB = CA$, соединимъ точки A и B съ точками O и O_1; находимъ, что прямоугольные треугольники OCA и OCB, имѣющіе общій катетъ OC, и кромѣ того, по построенію, $CA = CB$, равны между собою; слѣдов. $OA = OB$; подобнымъ же образомъ находимъ изъ равенства прямоугольныхъ треугольниковъ O_1CA и O_1CB, что $O_1A = O_1B$. Изъ этого слѣдуетъ, что точка B принадлежитъ обѣимъ окружностямъ, т. е. что B есть общая точка ихъ.



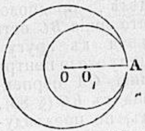
Черт. 161.

2-й случай. Положимъ что A (черт. 161) есть точка пересѣченія двухъ окружностей, и что центры O и O_1 такъ расположены, что оба лежатъ по одной сторонѣ перпендикуляра AC, опущеннаго изъ точки A на линію OO_1, соединяющую эти центры; требуется доказать, что окружности будутъ имѣть еще другую общую точку.

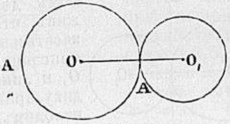
Доказ. Продоливъ перпендикуляръ AC, и взявъ на немъ $CB = CA$, соединимъ точки A и B съ точками O и O_1; находимъ, что прямоугольные треугольники OCA и OCB, имѣющіе общій катетъ OC, и, по построенію $AC = CB$, равны; слѣдов. $OA = OB$; подобнымъ же образомъ находимъ изъ равенства прямоугольныхъ треугольниковъ O_1CA и O_1CB, что $O_1A = O_1B$. Изъ этого слѣдуетъ, что точка B принадлежитъ обѣимъ окружностямъ, т е. что B есть общая точка ихъ.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что *линія, соединяющая точки пересѣченія двухъ окружностей, перпендикулярна къ линіи, соединяющей центры ихъ.*

§ 117. Двѣ окружности, имѣющія только одну общую точку, называются *касательными* (черт. 162, и 163), общая же точка ихъ называется *точкою касанія.* Касаніе называется *внутреннимъ* (черт. 162), когда одна окружность лежитъ внутри другой, и *внѣшнимъ* (черт. 163), когда окружности лежатъ по обѣ стороны точки касанія.



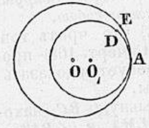
Черт. 162.



Черт. 163.

§ 118. Теорема. *Центры двухъ касательныхъ окружностей и точка касанія лежитъ на одной прямой.*

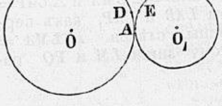
Положимъ во первыхъ, что двѣ окружности имѣютъ внутреннее касаніе (черт 164 ; требуется доказать, что точки O,O_1 и A лежатъ на одной прямой.



Черт. 164.

Доказ. Положимъ, что линія OO_1 при продолженіи не проходитъ чрезъ точку A, но пересѣчетъ окружности въ точкахъ D и E, такъ что четыре точки O, O_1, D и E находятся на одной прямой, а три точки O,O_1 и A составятъ нѣкоторый треугольникъ OAO_1. Если радіусъ внѣшняго круга означимъ чрезъ r, а радіусъ внутренняго—чрезъ r_1, и замѣтимъ, что $OO_1 + O_1D < OO_1DE$, то получимъ $OO_1 + r_1 < r$ или $OO_1 < r - r_1$; но изъ треугольника OO_1A нашли бы § 13) $OO_1 > OA - O_1A$, или $OO_1 > r - r_1$, что очевидно противурѣчитъ первому неравенству.

Положимъ, во вторыхъ, что двѣ окружности имѣютъ внѣшнее касаніе (черт. 165); требуется доказать что точки O,O_1 и A лежатъ на одной прямой.



Черт. 165.

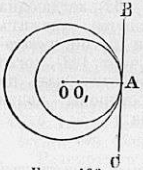
Доказ. Положимъ, что линія OO_1 не проходитъ чрезъ точку A, а пересѣчетъ окружности въ точкахъ D и E, такъ, что четыре точки O, D, E и O_1 находятся на одной прямой, а три точки O,A и O_1 составятъ нѣкоторый треугольникъ OAO_1. Если означимъ радіусы круговъ, описанныхъ около центровъ O и O_1, чрезъ r и r_1, и замѣтимъ, что $ODEO_1 > OD + O_1E$, то получимъ $OO_1 > r + r_1$; но изъ треугольника AOO_1 нашли бы (§ 13) $OO_1 < OA + O_1A$, т. е. $OO_1 < r + r_1$, что очевидно противурѣчитъ первому неравенству.

И такъ при внутреннемъ и при внѣшнемъ касаніи центры двухъ круговъ и точка касанія лежатъ на одной прямой.

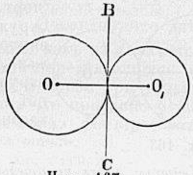
Изъ этого предложенія слѣдуетъ:

1. *Двѣ окружности имѣютъ внутреннее касаніе, когда разстояніе ихъ центровъ равняется разности ихъ радіусовъ, и внѣшнее— когда это разстояніе равняется суммѣ ихъ радіусовъ.*

2. *Двѣ касательныя окружности имѣютъ въ точкѣ касанія одну общую касательную линію BC* (черт. 166 и 167). Въ самомъ дѣлѣ, предположивъ, что линія BC есть касательная къ кругу, описанному около центра O, и линія OA перпендикулярна къ BC (§ 85), находимъ, по предъидущей теоремѣ, что O_1A также перпендикулярна къ BC, т. е. линія BC есть также касательная къ кругу, описанному около центра O_1.

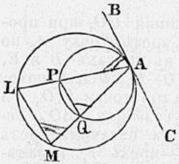


Черт. 166.



Черт. 167.

§ 119. ТЕОРЕМА. *Если чрезъ точку внутренняго или внѣшняго касанія проведемъ двѣ сѣкущія, то хорды, соединяющія точки ихъ пересѣченія съ окружностями, параллельны между собою.*

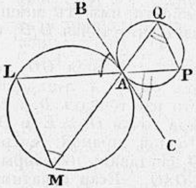


Черт. 168.

Положимъ, во первыхъ, что чрезъ точку внутренняго касанія A (черт. 168) проведены линіи AL и AM; требуется доказать, что LM и PQ параллельны.

Доказ. Проведя касательную BC, находимъ (§ 94): $\angle LAB = \angle LMA$ и $\angle PAB = \angle PQA$; слѣд. $\angle LMA = \angle PQA$, и потому линіи LM и PQ параллельны (§ 33 слѣд. 2).

Положимъ во вторыхъ, что чрезъ точку внѣшняго касанія A (черт. 169) проведены линіи LP и MQ; требуется доказать, что LM и PQ параллельны.



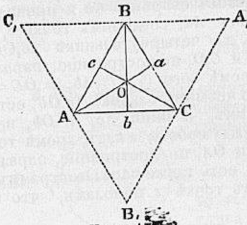
Черт. 169.

Доказ. Проведя касательную BC, находимъ (§ 94): $\angle LAB = \angle LMA$ и $\angle CAP = \angle PQA$; но углы LAB и CAP, какъ вертикальные, равны, слѣдов. $\angle LMA = \angle PQA$, и потому линіи LM и PQ параллельны.

Четыре замѣчательныя точки триугольника.

§ 120. ТЕОРЕМА. *Перпендикуляры, опущенные изъ вершины трехъ угловъ триугольника на противуположныя стороны, пересѣкаются въ одной точкѣ.*

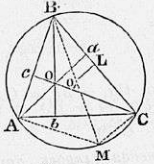
Доказ. Положимъ, что въ триугольникѣ ABC (черт. 170): $Aa \perp BC$; $Bb \perp AC$ и $Cc \perp AB$; требуется доказать, что линіи Aa, Bb и Cc пересѣкутся въ одной точкѣ O.



Черт. 170.

Чрезъ вершину A проведемъ линію параллельную BC, чрезъ вершину B—линію параллельную AC и чрезъ вершину C—линію параллельную AB; тогда составится триугольникъ $A_1B_1C_1$, котораго стороны въ точкахъ A, B и C раздѣлены пополамъ, потому что, напр $AB_1 = BC = AC_1$ (§ 37); слѣдов. линіи Aa, Bb и Cc перпендикулярны къ срединѣ сторонъ триугольника $A_1B_1C_1$, и потому эти перпендикуляры пересѣкутся въ одной точкѣ (§ 104).

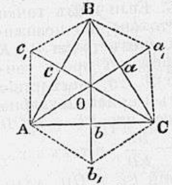
Пусть будетъ O (черт. 171) точка пересѣченія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ трехъ вершинъ триугольника ABC, на противуположныя стороны, и O_1 центръ описаннаго около триугольника круга. Проведя діаметръ BM, замѣтимъ, что уголъ MAB, какъ опирающійся на діаметръ BM, есть прямой; уголъ CcA, по построенію, также прямой; слѣдов. $AM \parallel Cc$; подобнымъ же образомъ доказывается, что $MC \parallel Aa$, слѣдов. $AO = MC$ (§ 37). Опустивъ изъ точки O_1 перпендикуляръ на сторону BC, находимъ изъ подобныхъ триугольниковъ MBC и O_1BL: $\frac{MC}{O_1L} = \frac{MB}{O_1B} = \frac{2}{1}$ или $MC = 2.O_1L$; слѣдов. $AO = 2\,LO_1$; это значитъ: *точка пересѣченія трехъ перпендикуляровъ отстоитъ отъ какой нибудь вершины триугольника вдвое дальше, нежели центръ описаннаго круга отъ противуположной стороны.*



Черт. 171.

§ 121. ТЕОРЕМА. *Линіи проведенныя изъ вершины трехъ угловъ триугольника къ срединѣ противуположныхъ сторонъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.* *)

Положимъ, что въ триугольникѣ ABC (черт. 172) проведены линіи Aa и Bb изъ вершины угловъ A и B къ срединѣ противуположныхъ сторонъ, и что чрезъ вершину третьяго угла C и точку O проведена линія Cc; требуется доказать, что сторона AB въ точкѣ c дѣлится пополамъ.

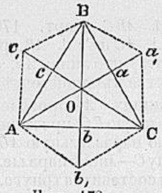


Черт. 172.

Доказ. Продолживъ линію Aa, и сдѣлавъ $aa_1 = Oa$, соединимъ точку a_1 съ точкамм B и C. Въ четыреугольникѣ OBa_1C діагонали BC и Oa_1, по построенію, дѣлятся пополамъ; слѣдов. этотъ четыреугольникъ есть параллелограммъ. Подобнымъ же образомъ

---

*) Эта точка называется въ механикѣ *центромъ тяжести* триугольника.



Черт. 172.

составимъ параллелограммъ $AOCb_1$. Наконецъ, продоживъ сторону Cc и проведя Bc_1 параллельно Aa, соединимъ точки c_1 и A. Такъ какъ въ четыреугольникѣ Ac_1Ob_1 стороны Ab_1 и C_1O, по построенію, параллельны, и кромѣ того (§ 37) $Ab_1 = OC = Ba_1 = c_1O$, то четыреугольникъ Ac_1Ob_1 есть параллелограммъ, и линіи Ac_1 и Ob_1 параллельны между собою; а какъ, кромѣ того, линіи Bc_1 и OA, по построенію, параллельны, то четыреугольникъ Ac_1BO есть также параллелограммъ, и потому сторона AB дѣлится въ точкѣ c пополамъ, что и требовалось доказать.

Замѣтимъ, что $OB = Ac_1$ и $Ac_1 = Ob_1 = 2Ob$; слѣдов. $OB = 2Ob$; это значитъ: *точка пересѣченія O дѣлитъ каждую изъ линій на двѣ части, изъ которыхъ одна вдвое больѐ другой.*

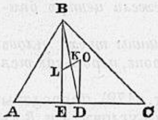
Изъ трехъ параллелограммовъ $AOCb_1$, $BOCa_1$ и $AOBc_1$ находимъ (§ 61):

$$AC^2 + Ob_1^{\,2} = 2OC^2 + 2\ OA^2;$$
$$BC^2 + Oa_1^{\,2} = 2OB^2 + 2OC^2;$$
$$AB^2 + Oc_1^{\,2} = 2OA^2 + 2OB^2.$$

Сложивъ эти уравненія и замѣтивъ, что $Oa_1 = Bc_1 = OA$, $Ob_1 = Ac_1 = OB$ и $Oc_1 = Ba_1 = OC$, находимъ:

$$AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3\ (OA^2 + OB^2 + OC^2).$$

§ 122. **Теорема.** *Точка пересѣченія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершины трехъ угловъ треугольника на противуположныя стороны, точка пересѣченія линій, проведенныхъ изъ вершины трехъ угловъ треугольника къ срединѣ противуположныхъ сторонъ и центръ круга, описаннаго около треугольника, лежатъ на одной прямой.*

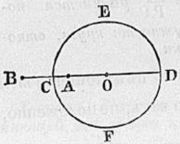


Черт. 173.

Доказ. Пусть будетъ (черт. 173) L точка пересѣченій перпендикуляровъ, K точка пересѣченія линій, проведенныхъ изъ вершины угловъ треугольника къ срединѣ противуположныхъ сторонъ и O центръ описаннаго круга; наконецъ положимъ, что D есть средина стороны AC. Если чрезъ точки B и L проведемъ линію, то она, по положенію, будетъ перпендикулярна къ AC, и если чрезъ точки B и K проведемъ линію, то она, по положенію, пройдетъ чрезъ точку D, наконецъ, если соединимъ точки O и D, то, вслѣдствіе свойства описаннаго круга, линія OD будетъ перпендикулярна къ AC, слѣдов. параллельна линіи BE. Замѣтивъ, что $BL = 2\ OD$ (§ 120), и $BK = 2\ KD$ (§ 121), находимъ $\frac{BL}{OD} = \frac{BK}{KD}$, и такъ какъ, кромѣ того, вслѣдствіе параллельности линій BE и OD, углы LBK и KDO равны, то треугольники BKL и DKO подобны (§ 50); слѣдов. $\angle BKL = \angle OKD$, и потому LKO есть прямая линія.

Точки L, K, O и центръ вписаннаго круга называются *четырьмя замѣчательными точками треугольника.*

Взаимныя точки.



Черт. 174.

§ 123. Если продолжимъ діаметръ CD (черт. 174) круга, и возмемъ на немъ внѣшнюю точку B и внутреннюю точку A такъ, чтобъ

$$OA.\ OB = OC^2,$$

то точки A и B называются *взаимными*, а самая окружность $CEDF$, относительно которой точки A и B суть взаимныя, называется *управляющею окружностью.*

Представивъ уравненіе $OA.\ OB = OC^2$ въ видѣ пропорціи

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OA},$$

находимъ:

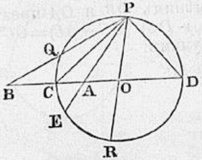
$$\frac{OB + OC}{OB - OC} = \frac{OC + OA}{OC - OA};$$

но $OB + OC = OB + OD = BD$; $OB - OC = BC$; $OC + OA = OD + OA = AD$ и $OC - OA = CA$; слѣд.

$$\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AC};$$

это значитъ, что линія BD въ точкахъ C и A раздѣлена гармонически (§ 75), т. е. *двѣ взаимныя точки B и A и концы C и D діаметра суть четыре гармоническія точки.*

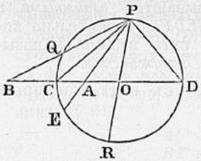
Теорема. Если какую нибудь точку P управляющей окружности (черт. 175) *соединимъ съ двумя взаимными точками A и B, то отношеніе* $\frac{PB}{PA}$ *есть постоянная величина для всѣхъ точекъ окружности.*



Чарт. 175.

Доказ. Проведемъ линію PC и діаметръ PR; треугольники APO и BPO имѣютъ общій уголъ O, и кромѣ того, вслѣдствіе взаимности точекъ A и B: $\frac{OB}{OP} = \frac{OP}{OA}$, слѣдов. эти треугольники подобны, и потому $\angle EPR = \angle PBD$. Но мѣра угла EPR есть $\frac{CR - CE}{2}$, и мѣра угла PBD есть $\frac{PD - QC}{2}$; слѣдов. $CR - CE = PD - QC$. Но дуги PD и CR, соотвѣтствующія равнымъ центральнымъ угламъ, равны; и потому $CE = QC$; это значитъ, что линія PC дѣлитъ уголъ BPA пополамъ. Вслѣдствіе этого имѣемъ (§ 56), $\frac{PB}{PA} = \frac{BC}{AC}$; что и требовалось доказать.

Обратная теорема. Если даны двѣ точки A и B (черт. 175), *то всякая точка P, для которой отношеніе $\frac{PB}{PA}$ равняется постоянному отношенію $m:n$, лежитъ на окружности круга, относительно которой A и B суть взаимныя точки.*



Черт. 175.

Доказ. Раздѣлимъ линію AB на двѣ части BC и AC въ отношеніи $m:n$ такъ, что $\frac{BC}{AC} = \frac{m}{n}$; но какъ, по положенію, $\frac{PB}{PA} = \frac{m}{n}$, то заключаемъ (§ 56), что линія PC дѣлитъ уголъ BPA пополамъ. Если проведемъ линію PD перпендикулярно къ линіи PC, раздѣлимъ CD пополамъ и изъ средины ея O радіусомъ OC опишемъ окружность, то эта окружность пройдетъ чрезъ точку P, потому что CPD есть уголъ прямой. Замѣтивъ, что уголъ PBD имѣетъ мѣрою $\frac{PD - QC}{2}$, а уголъ EPR мѣрою $\frac{CR - CE}{2}$, и что $CR = PD$ и $CE = CQ$, заключаемъ что $\angle PBD = \angle EPR$. Изъ этого слѣдуетъ, что треугольники BPO и APO, имѣющіе общій уголъ O, и кромѣ того $\angle PBD = \angle EPR$, подобоы, слѣд. $\frac{OB}{OP} = \frac{OP}{OA}$, или $OB.\ OA = OP^2 = OC^2$. Это уравненіе показываетъ, что A и B суть взаимныя точки относительно окружности $QPDR$.

Если въ уравненіи $OB.\ OA = OC^2$ замѣнимъ OB и OA чрезъ $BC + OC$ и $OC - AC$, то находимъ: $(BC + OC)\ (OC - AC) = OC^2$, или раскрывъ скобки и сокративъ, получимъ:

$$OC\ (BC - AC) = BC.\ AC;$$

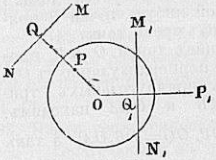
отсюда:

$$OC = \frac{BC\ .\ AC}{BC - AC}.$$

Это уравненіе показываетъ, что радіусъ круга зависитъ только отъ положенія точекъ A и B, и потому этотъ радіусъ будетъ одинакій для всѣхъ точекъ P, для которыхъ $\frac{PB}{PA} = \frac{m}{n}$.

Замѣтимъ, что съ помощію этого уравненія опредѣляется вообще радіусъ управляющаго круга по данному положенію двухъ взаимныхъ точекъ A и B.

Поляры.

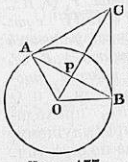


Черт. 176.

§ 124 Если изъ центра O (черт. 176) опустимъ перпендикуляръ OQ на какую нибудь линію MN, и на этомъ перпендикулярѣ опредѣлимъ точку P взаимную Q, то точка P называется ***полюсомъ*** прямой MN, а линія MN — ***полярою*** точки P.

Очевидно, что когда линія MN не пересѣкаетъ кругъ, то полюсъ ея находится внутри круга, когда же линія M_1N_1 пересѣкаетъ кругъ, то полюсъ ея P_1 лежитъ внѣ круга.

Теорема. Вершина описаннаго угла есть полюсъ хорды, соединяющей двѣ точки касанія.



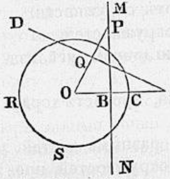
Черт. 177.

Положимъ (черт. 177), что ACB есть описанный уголъ, AB хорда, соединяющая точки касанія A и B, и OC линія, проведенная отъ центра къ вершинѣ описаннаго угла; требуется доказать, что C есть полюсъ прямой AB, т. е. что линія OC перпендикулярна къ хордѣ AB, и что P и C суть точки взаимныя.

Доказ. Изъ равенства прямоугольныхъ треугольниковъ OAC и OBC слѣдуетъ, что OC перпендикулярна къ AB; изъ прямоугольнаго же треугольника OAC находимъ: $OC.\ OP = OA^2$, — условіе взаимности точекъ P и C.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что полюсъ діаметра находится на безконечномъ разстояніи.

Теорема. Полюсы всѣхъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ данную точку лежатъ на полярѣ этой точки.

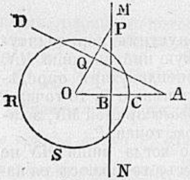


Черт. 178.

Пусть будетъ CSR (черт. 178) управляющая окружность, A какая нибудь данная точка, MN ея поляра и AD какая нибудь линія, проходящая чрезъ точку A; требуется доказать, что полюсъ прямой AD лежитъ на линіи MN.

Доказ. Опустивъ изъ центра перпендикуляръ OP на линію AD и замѣтивъ, что прямоугольные треугольники OPB и OQA, имѣющіе общій уголъ O, подобны, находимъ $\frac{OP}{OA} = \frac{OB}{OQ}$ или $OP.\ OQ = OB.\ OA$; а такъ какъ, по положенію, A и B суть точки взаимныя, то $OB.\ OA = OC^2$; слѣд. $OP.\ OQ = OC^2$. Это уравненіе показываетъ, что P и Q суть точки взаимныя, слѣдов. полюсъ P прямой AD лежитъ на линіи MN.

Обратная теорема. Поляры всѣхъ точекъ прямой линіи сходятся въ полюсъ этой прямой.

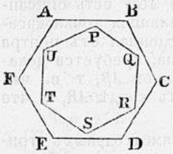


Черт. 178.

Пусть будетъ CSR (черт. 178) управляющая окружность, MN какая нибудь линія и A полюсъ ея; требуется доказ., что поляра какой нибудь точки P прямой MN проходитъ чрезъ точку A.

Доказ. Соединивъ точки O и P, проведемъ линію AD перпендикулярно къ OP. Изъ подобныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ OPB и OQA находимъ: $\frac{OP}{OA}=\frac{OB}{OQ}$ или $OP.\,OQ=OB.OA$; а такъ какъ, по положенію, A и B суть точки взаимныя, то $OB.\,AO=OC^2$, и потому $OP.\,OQ=OC^2$. Изъ этого слѣдуетъ, что P и Q суть точки взаимныя, и что линія AD есть поляра точки P.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что *если вершины* P, Q, R... (черт. 179) *многоугольника* $PQRSTU$ *суть полюсы сторонъ другаго многоугольника* $ABCDEF$, *то, и наоборотъ, вершины* A, B, C.. *втораго многоугольника суть полюсы сторонъ перваго.* Въ самомъ дѣлѣ, если P и Q суть полюсы прямыхъ AB и BC, проходящихъ чрезъ точку B, то, по предыдущему, точки P и Q должны лежать на полярѣ точки B; слѣдов. B будетъ полюсъ прямой PQ.



Черт. 179.

Задачи.

69. Найти кратчайшее разстояніе точки отъ окружности.

70. Найти наибольшее разстояніе точки отъ окружности.

71 Найти кратчайшее разстояніе двухъ окружностей.

72. На окружности опредѣлить дугу равную данной дугѣ, взятой два раза, три раза и т. д.

73. Чрезъ точку A, лежащую внутри круга, провести хорду, которая въ точкѣ A дѣлилась бы пополамъ.

74. Раздѣлить данную дугу на 2, 4, 8.... равныхъ частей.

75. Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей, проходящихъ чрезъ двѣ данныя точки A и B.

76. Описать даннымъ радіусомъ окружность, проходящую чрезъ двѣ данныя точки A и B.

77. Найти центръ дуги или окружности.

78. Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей, касательныхъ къ прямой AB въ данной точкѣ ея M.

79. Описать даннымъ радіусомъ окружность касательную къ прямой AB въ данной точкѣ ея M.

80. Описать окружность, проходящую чрезъ точку N и касательную къ прямой AB въ данной точкѣ ея M.

81. Описать радіусомъ r окружность, которой центръ находился бы на прямой MN, и которая касалася бы прямой AB.

82. Описать радіусомъ r окружность, которой центръ находился бы на данной окружности, и которая касалась бы прямой AB.

83. Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей радіуса r, касательныхъ къ данной окружности радіуса R.

84. Описать радіусомъ r окружность, которой центръ находился бы на прямой AB, и которая касалась бы даннаго круга радіуса R.

85. Описать радіусомъ r окружность касательную къ данной окружности въ точкѣ M.

86. Описать окружность, проходящую чрезъ точку M и касательную къ данной окружности въ точкѣ N.

87. Описать окружность, проходящую чрезъ двѣ точки A и B и пересѣкающую данный кругъ такъ, чтобы хорда пересѣченія была бы параллельна данной прямой MN.

88. Описать окружность касательную къ данному кругу и къ прямой AB въ данной точкѣ ея M.

89. Описать окружность касательную къ данной прямой AB и къ окружности въ данной точкѣ ея M.

90. Опредѣлить длину линіи, соединяющей вершину прямаго угла съ срединою гипотенузы.

91. Найти геометрическое мѣсто вершины прямоугольныхъ треугольниковъ, имѣющихъ одну и ту же гипотенузу.

92. Найти геометрическое мѣсто средины хордъ, сходящихся въ одну точку A.

93. При какихъ условіяхъ можно провести окружность чрезъ четыре данныя точки A, B, C и D?

94. Возставить перпендикуляръ на концѣ прямой AB, которую продолжить нельзя.

95. Провести чрезъ данную точку A касательную къ кругу.

96. Провести къ кругу касательную, которая составила бы данный уголъ съ прямой AB.

97. Найти геометрическое мѣсто точекъ такого свойства, что касательныя проведенныя отъ нихъ къ данному кругу радіуса r, имѣли бы одинакую длину a.

98. Найти на прямой AB такую точку, чтобы касательная прове-

денная отъ этой точки къ данному кругу равнялась данной линіи a.

99. Провести чрезъ точку A сѣкущую къ данному кругу, чтобы часть сѣкущей внутри круга равнялась данной линіи a.

100. Провести чрезъ точку A сѣкущую къ данному кругу такъ, чтобы она отсѣкала дугу вмѣщающую данный уголъ a.

101. На данной прямой AB описать дугу, вмѣщающую данный уголъ.

102. Найти геометрическое мѣсто вершинъ треугольниковъ, имѣющихъ одно и тоже основаніе AB и данный уголъ a при вершинѣ.

103. Опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ, отъ которыхъ данная прямая AB видима подъ однимъ тѣмъ же угломъ.

104. На прямой AB найти такую точку, чтобы линіи, проведенныя отъ этой точки къ двумъ даннымъ точкамъ M и N, составили данный уголъ a.

105. Найти точку, отъ которой двѣ прямыя AB и MN видимы подъ угломъ 45°.

106. Найти внутри треугольника ABC точку, отъ которой три стороны треугольника видимы подъ однимъ и тѣмъ же угломъ.

107. Построить треугольникъ по данной высотѣ h, данному основанію a и углу m противуположному основанію.

108. На окружности даны двѣ точки A и B; найти на этой же окружности такую точку, чтобы сумма разстояній ея отъ точекъ A и B равнялась данной линіи s.

109. На окружности даны двѣ точки A и B, найти на этой же окружности такую точку, чтобы разность разстояній ея отъ точекъ A и B равнялась данной линіи d.

110. Построить треугольникъ по данному периметру, основанію и углу противуположному основанію.

111. Найти среднюю пропорціональную между двумя линіями.

112. Построить треугольникъ по данному основанію AB, противоположмому углу m и радіусу описаннаго круга r.

113. Провести касательную линію къ двумъ окружностямъ.

114. Построить треугольникъ по данной высотѣ, данному углу m при вершинѣ и радіусу r вписаннаго круга.

115. Данны двѣ окружности; провести прямую, касательную къ одной и сѣкущую къ другой, такъ, чтобы часть ея, заключенная внутри втораго круга, равнялась данной линіи a.

116. Провести къ двумъ даннымъ кругамъ сѣкущую такъ, чтобы части ея, заключенныя въ этихъ кругахъ, равнялись даннымъ линіямъ.

117. На прямой AB найти такую точку, чтобы касательныя, проведенныя отъ этой точки къ двумъ даннымъ кругамъ O и O_1, составили равные углы съ прямой AB.

118. На окружности даны двѣ точки A и B; найти на этой же окружности точку, которой разстоянія отъ точекъ A и B были бы въ данномъ отношеніи $m : n$.

119. Раздѣлить окружность на шесть равныхъ частей.

120. Раздѣлить окружность на четыре равныя части.

121. Раздѣлить окружность на десять равныхъ частей.

122. Раздѣлить прямой уголъ на три равныя части.

123. Вписать кругъ въ данный секторъ AOB.

124. Провести чрезъ точку A, лежащую внутри круга, радіуса r, хорду такъ, чтобъ она въ точкѣ A раздѣлилась въ отношеніи $m : n$.

125. Чрезъ внѣшнюю точку A провести сѣкущую къ кругу такъ, чтобъ она этимъ кругомъ раздѣлилась пополамъ.

126. Чрезъ внѣшнюю точку A провести сѣкущую къ кругу, такъ чтобъ она этимъ кругомъ раздѣлилась въ отношеніи $m : n$.

127. Описать кругъ касательный къ тремъ даннымъ линіямъ.

128. Найти геометрическое мѣсто точекъ, дѣлящихъ въ отношеніи $m : n$ всѣ прямыя, проведенныя отъ данной точки A къ данной окружности.

129. Описать кругъ, проходящій чрезъ точки A и B и касательный къ прямой MN.

130. Описать кругъ, проходящій чрезъ точку C и касательный къ двумъ прямымъ AB и MN.

131. Описать кругъ, проходящій чрезъ двѣ данныя точки A и B и касательный къ данному кругу.

132. Описать кругъ, проходящій чрезъ точку A и касательный къ прямой MN и къ данному кругу.

133. Описать кругъ касательный къ двумъ прямымъ AB и MN и къ данному кругу радіуса r.

134. Описать кругъ касательный къ прямой AB и къ двумъ даннымъ кругамъ радіусовъ R и r.

135. Описать кругъ, проходящій чрезъ точку A и касательный къ двумъ даннымъ кругамъ радіусовъ R и r.

136. Описать кругъ касательный къ тремъ даннымъ кругамъ радіусовъ r, r_1 и r_2.

137. Раздѣлить пополамъ неприступный уголъ A.

138. Опустить перпендикуляръ изъ неприступной точки J на приступную линію AB.

139. Опустить перпендикуляръ изъ данной точки A на линію, которой двѣ только точки B и C видимы изъ A.

140. Провести чрезъ точку A линію параллельную прямой, которой двѣ только точки B и C видимы изъ A.

141. Опредѣлить разстояніе двухъ точекъ A и B, изъ которыхъ точка A неприступна.

142. Опредѣлить разстояніе двухъ неприступныхъ точекъ A и B.

143. Опредѣлить разстояніе точки C отъ прямой, которой двѣ только точки A и B видимы изъ C.

ГЛАВА VI.

О правильныхъ многоугольникахъ.

Правильные многоугольники вписанные и описанные. Задачи.

Правильные многоугольники вписанные и описанные.

§ 125. Многоугольникъ, котораго стороны равны между собою и котораго углы равны между собою, называется *правильнымъ*. Такъ напр. треугольникъ равносторонній есть правильный треугольникъ, квадратъ есть правильный четыреугольникъ. Изъ опредѣленія правильнаго многоугольника слѣдуетъ:

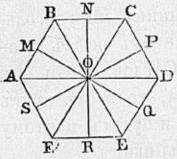
1. Такъ какъ во всякомъ многоугольникѣ, имѣющемъ n сторонъ, сумма внутреннихъ угловъ равна $2d\ (n-2)$ (§ 41), то каждый внутренній уголъ правильнаго многоугольника о n сторонахъ равенъ $2d\,\frac{(n-2)}{n}$; слѣдов. внутренній уголъ правильнаго многоугольника зависитъ только отъ числа его сторонъ.

2. Правильные одноименные многоугольники, т. е. такіе, которые имѣютъ одинаковое число сторонъ, имѣютъ всегда и равные углы.

3. Правильные одноименные многоугольники подобны, потому что углы ихъ равны и стороны пропорціональны (§ 62).

4. Периметры правильныхъ одноименныхъ многоугольниковъ относятся какъ стороны ихъ (§ 63).

§ 126. Теорема. ***Около всякаго правильнаго многоугольника можно описать кругъ.***



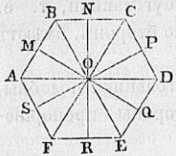
Черт. 180.

Доказ. Положимъ, что $ABCDEF$ (черт. 180) есть правильный многоугольникъ: $AB=BC=CD\ldots$; $\angle A=\angle B=\angle C\ldots$

Если раздѣлимъ два угла A и B пополамъ прямыми AO и BO, то точка ихъ пересѣченія O будетъ центромъ описаннаго круга. Въ самомъ дѣлѣ, соединивъ точку O со всѣми вершинами многоугольника и опустивъ отъ этой же точки перпендикуляры на всѣ стороны его, замѣтимъ, что треугольникъ AOB равнобедренный, потому что углы ABO и BAO, какъ половины равныхъ угловъ, равны; слѣдов. $AO=OB$ и $AM=MB$ (§ 25 слѣдст.), т. е. перпендикуляръ OM дѣлитъ сторону AB пополамъ. Далѣе, треугольники AOB и BOC, имѣющіе общую сторону OB, и кромѣ того, по положенію, $AB=BC$, а по построенію $\angle ABO=\angle CBO$, равны; слѣд. треугольникъ BOC также равнобедренный, и $\angle CBO=\angle BCO$; изъ этого слѣдуетъ, что линія CO дѣлитъ уголъ C, а перпендикуляръ ON—сторону BC пополамъ, и что

$$AO=BO=OC \text{ и } OM=ON.$$

Подобнымъ же образомъ находимъ, что треугольники BOC и COD, имѣющіе общую сторону OC и, кромѣ



Черт. 180.

того, по положенію, $BC = CD$ и, по доказанному, $\angle BCO = \angle DCO$, равны. Слѣдов. треугольникъ COD также равнобедренный и $\angle CDO = \angle DCO$; изъ этого слѣдуетъ, что линія DO дѣлитъ уголъ D, а перпендикуляръ OP— сторону CD пополамъ, и что $OC = OD$ и $ON = OP$.

Разсуждая такимъ образомъ далѣе заключаемъ, что:

$$OA = OB = OC = OD = OE = OF;$$
$$OM = ON = OP = OQ = OR = OS,$$

т. е. точка O отстоитъ отъ всѣхъ вершинъ многоугольника на одинакомъ разстояніи и также отъ всѣхъ сторонъ его на одинакомъ разстояніи. Слѣдов. если изъ точки O опишемъ кругъ радіусомъ OA, то этотъ кругъ пройдетъ чрезъ всѣ точки A, B, C... и будетъ поэтому кругомъ описаннымъ около многоугольника.

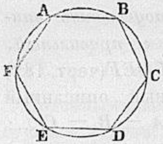
Точка O, центръ описаннаго круга, называется также *центромъ многоугольника*. Линія OA называется *радіусомъ* описаннаго круга, а перпендикуляръ OM, опущенный изъ центра на сторону, — *апоѳемою*.

Изъ приведенныхъ въ этомъ § разсужденій слѣдуетъ:

1) Всѣ линіи, дѣлящія углы правильнаго многоугольника пополамъ, сходятся въ одной точкѣ, — въ центрѣ многоугольника; въ этой же точкѣ сходятся и всѣ перпендикуляры, возставленные изъ срединъ сторонъ его.

2) Для нахожденія центра многоугольника можно, вмѣсто того, чтобы раздѣлить два угла его пополамъ, раздѣлить двѣ какія нибудь стороны пополамъ, и изъ срединъ ихъ возставить перпендикуляры; пересѣченіемъ этихъ перпендикуляровъ опредѣлится также центръ многоугольника.

3) Всѣ углы при центрѣ: AOB, BOC, COD... равны между собою, и каждый равенъ четыремъ прямымъ дѣленнымъ на число сторонъ многоугольника.



Черт. 181.

4) Равносторонній многоугольникъ вписанный $ABCDEF$ (черт. 181) будетъ всегда и равноугольнымъ, т. е. правильнымъ, потому что, вслѣдствіе равенства дугъ AB, BC, CD..., стягиваемыхъ сторонами многоугольника, всѣ углы его имѣютъ одинакую мѣру.

Равнымъ образомъ равноугольный многоугольникъ вписанный $ABCDEF$ (черт. 181) будетъ всегда и равностороннимъ, т. е. правильнымъ, потому что изъ равенства дугъ, измѣряющихъ его углы, слѣдуетъ равенство дугъ, стягиваемыхъ его сторонами; такъ напр. изъ равенства дугъ $BCDEF$ и $CDEFA$, соотвѣтствующихъ равнымъ угламъ A и B, слѣдуетъ, что дуга BC равняется дугѣ AF.

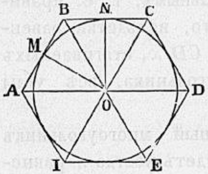
5. Діаметръ, проходящій чрезъ вершину однаго изъ угловъ правильнаго вписаннаго многоугольника, или чрезъ средину одной изъ его сторонъ, дѣлитъ многоульникъ на двѣ равныя части. Въ самомъ дѣлѣ, такой діаметръ пройдетъ или чрезъ вершину противуположнаго угла или чрезъ середину противуположной стороны, потому что діаметръ дѣлитъ окружность на двѣ равныя части; при наложеніи же этихъ частей—какъ полуокружности такъ и части вписаннаго многоугольника совпадутъ.

§ 127. Теорема. *Во всякій правильный многоугольникъ можно вписать кругъ.*

Доказ. Такъ какъ, по предъидущему §, центръ правильнаго многоугольника отстоитъ отъ всѣхъ сторонъ его на одинакомъ разстояніи, то кругъ, описанный изъ того же центра радіусомъ равнымъ апоѳемѣ, будетъ касаться всѣхъ сторонъ многоугольника, и будетъ поэтому вписаннымъ кругомъ.

Вслѣдствіе этого апоѳема называется также *радіусомъ вписаннаго круга*.

§ 128. Теорема. *Равноугольный многоугольникъ описанный будетъ всегда равносторонній т. е. правильный.*



Черт. 182.

Положимъ, что $ABCDEF$ (черт. 182) есть равноугольный описанный многоугольникъ: $A = B = C \ldots$; требуется доказать, что

$$AB = BC = CD \ldots$$

Доказ. Соединивъ центръ O съ вершинами многоугольника, и проведя радіусы OM и ON въ точки касанія M и N, находимъ, что прямоугольные треугольники MOB и NOB, имѣющіе общую гипотенузу OB и равные катеты OM и ON, равны (§ 25); слѣдов. $\angle MBO = \angle NBO$, т. е. линія, соединяющая центръ съ вершиною какого нибудь угла многоугольника, дѣлитъ этотъ уголъ пополамъ. Вслѣдствіе этого треугольники AOB и BOC, имѣющіе общую сторону OB а по доказанному, $\angle ABO = \angle CBO$ и кромѣ того $\angle BAO = \angle BCO$, какъ половины равныхъ угловъ, равны, и потому $AB = BC$.

Подобнымъ же образомъ доказывается равенство и другихъ сторонъ.

Обратная теорема. Равносторонній описанный многоугольникъ будетъ всегда и равноугольный, т. е. правильный.

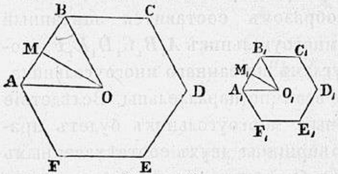
Положимъ, что въ описанномъ многоугольникѣ $ABCDEF$ (черт. 182) $AB = BC = CD \ldots$; требуется доказать, что

$$A = B = C \ldots$$

Доказ. Изъ равенства прямоугольныхъ треугольниковъ MOB и BON, имѣющихъ общую гипотенузу и равные катеты OM и ON, слѣдуетъ: $\angle ABO = \angle CBO$, т. е. линія, соединяющая центръ съ вершиною какого нибудь угла, дѣлитъ этотъ уголъ пополамъ. Вслѣдствіе этого треугольники AOB и BOC равны, потому что имѣютъ общую сторону OB, и кромѣ того, $AB = BC$ и $\angle ABO = \angle CBO$; изъ равенства же этихъ треугольниковъ слѣдуетъ, что $\angle BAO = \angle BCO$; а такъ какъ, по доказанному, углы BAO и BCO суть половины угловъ A и C, то $A = C$.

Подобнымъ же образомъ доказывается равенство и другихъ угловъ.

§ 129. Теорема. *Периметры правильныхъ одноименныхъ многоугольниковъ относятся какъ радіусы вписанныхъ или описанныхъ круговъ.*



Черт. 183.

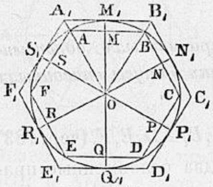
Доказ. Пусть будутъ $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (чер. 183) два одноименные правильные многоугольники, O и O_1 ихъ центры. Соединимъ O съ точками A и B и опустимъ изъ O перпендикуляръ OM на сторону AB; далѣе соединимъ O_1 съ точками A_1 и B_1 и опустимъ изъ O_1 перпендикуляръ на сторону A_1B_1. Треугольники OBA и $O_1B_1A_1$, въ которыхъ углы OBA и OAB соотвѣтственно равны угламъ $O_1B_1A_1$ и $O_1A_1B_1$, какъ половины равныхъ угловъ (§ 126), подобны; слѣдов. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{O_1A_1} = \frac{OM}{O_1M_1}$. Но такъ какъ периметры правильныхъ многоугольниковъ относятся какъ стороны (§ 125 слѣдс. 4), то:

$$\frac{AB + BC + CD + \ldots}{A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + \cdots} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{O_1A_1} = \frac{OM}{O_1M_1}.$$

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что периметры двухъ одноименныхъ правильныхъ многоугольниковъ, изъ которыхъ одинъ вписанъ въ кругъ, а другой описанъ около него, относятся между собою какъ апоѳема вписаннаго многоугольника къ радіусу круга.

§ 130. Задача. *По данной сторонѣ правильнаго вписаннаго многоугольника опредѣлить сторону одноименнаго описаннаго многоугольника.*

Рѣшеніе. Пусть будетъ $ABCDEF$ (черт. 184) правильный вписанный многоугольникъ. Опустивъ изъ центра перпендикуляры на стороны его и продоливъ ихъ до пересѣченія съ окружностью, проведемъ чрезъ точки $M_1 N_1 P_1 \ldots$ касательныя; такимъ образомъ составится описанный многоугольникъ $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, котораго углы равняются угламъ вписаннаго многоугольника, потому что стороны ихъ взаимно параллельны. Вслѣдствіе этого (§ 128) описанный многоугольникъ будетъ правильный. Замѣтимъ, что вершины двухъ соотвѣтсвенныхъ угловъ A_1 и A и центръ O лежатъ на одной прямой линіи, потому что изъ равныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ $A_1 S_1 O$ и $A_1 M_1 O$ слѣдуетъ, что линія OA_1 дѣлитъ уголъ $S_1 OM_1$ пополамъ, а изъ равныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ ASO и AMO слѣдуетъ, что линія OA дѣлитъ тотъ же уголъ пополамъ; слѣдов. линіи OA_1 и OA совпадаютъ.



Черт. 184.

Изъ подобныхъ треугольниковъ AOB и $A_1 O_1 B_1$ находимъ (§ 48 слѣдствіе):

$$\frac{A_1 B_1}{A\,B} = \frac{OM_1}{OM}\ ;$$

а изъ прямоугольнаго треугольника MOA:

$$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2}\ ;$$

но такъ какъ $AM = \frac{AB}{2}$, то $OM = \sqrt{OA^2 - \frac{AB^2}{4}}$. Вставивъ это выраженіе въ предъидущую пропорцію, получимъ

$$\frac{A_1 B_1}{A\,B} = \frac{OM_1}{\sqrt{OA^2 - \frac{AB^2}{4}}}$$

Означимъ чрезъ n число сторонъ многоугольника $ABCDEF$, чрезъ a_n сторону его, чрезъ b_n сторону описаннаго многоугольника и чрезъ r радіусъ круга, тогда предъидущая пропорція принимаетъ видъ:

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - \frac{a_n{}^2}{4}}}\ ;$$

и отсюда

$$b_n = \frac{a_n \cdot r}{\sqrt{r^2 - \frac{a_n{}^2}{4}}}.$$

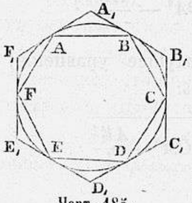
Съ помощію этого выраженія можно, по данной сторонѣ вписаннаго многоугольника, опредѣлить сторону одноименнаго описаннаго многоугольника.

Если предъидущее уравненіе возвысимъ въ квадратъ и опредѣлимъ изъ него a_n, то получимъ:

$$a_n = \frac{b_n \cdot r}{\sqrt{r^2 + \frac{b^2}{4}}}.$$

Съ помощію этого выраженія можно, по данной сторонѣ описаннаго многоугольника, опредѣлить сторону одноименнаго вписаннаго многоугольника.

Чтобъ описать многоугольникъ одноименный съ вписаннымъ многоугольникомъ $ABCDEF$ (черт. 185), можно также провести касательныя въ вершинахъ A, B, C. . вписаннаго многоугольника Многоугольникъ $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, такимъ образомъ составленный, будетъ равноугольный, потому что всѣ углы его имѣютъ одинакую мѣру (§ 97);

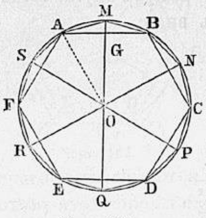


Черт. 185.

слѣдов. этотъ многоугольникъ, по § 128, будетъ правильный.

§ 131. Задача. *Удвоить число сторонъ правильнаго вписаннаго многоугольника.*

Рѣшеніе. Пусть будетъ $ABCDEF$ (черт. 186) правильный вписанный многоугольникъ. Опустимъ изъ центра перпендикуляры на стороны его, и продолжимъ ихъ до пересѣченія съ окружностью; точки пересѣченія M, N, P, Q... соединимъ съ точками A, B, C, D... Многоугольникъ $AMBNC$..., такимъ образомъ составленный, имѣетъ вдвое больше сторонъ, нежели многоугольникъ $ABCDEF$; а такъ какъ дуги AB, BC, CD... въ точкахъ M, N, P... дѣлятся пополамъ (§ 84), и $AM=MB=BN$..., то этотъ многоугольникъ будетъ равносторонній, слѣд., по § 126слѣдс. 4, правильный.



Черт. 186.

Очевидно, что при удвоеніи числа сторонъ периметръ вписаннаго многоугольника увеличивается.

Соединивъ центръ съ вершиною A, находимъ изъ треугольника OAM (§ 59):

$$AM^2 = OA^2 + OM^2 - 2\ OM.OG;$$

но изъ прямоугольнаго треугольника OAG имѣемъ:

$$OG = \sqrt{OA^2 - AG^2} = \sqrt{OA^2 - \frac{AB^2}{4}}\ .$$

Вставивъ это выраженіе въ предъидущее уравненіе, и замѣтивъ, что $OA = OM$, находимъ:

$$AM^2 = 2\ OM^2 - 2\ OM \sqrt{OM^2 - \frac{AB^2}{4}}\ .$$

Означимъ чрезъ n число сторонъ многоугольника $ABCDEF$, чрезъ a_n сторону его, чрезъ a_{2n} сторону многоугольника $AMBNC$..., имѣющаго вдвое больше сторонъ, и чрезъ r радіусъ круга, тогда предъидущее уравненіе приметъ видъ:

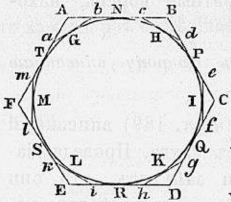
$$a_{2n}{}^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a_n{}^2}{4}}\ .$$

Съ помощію этого уравненія можно, по данной сторонѣ вписаннаго многоугольника о n сторонахъ, опредѣлить сторону вписаннаго же многоугольника о $2n$ сторонахъ.

Прилагая это выраженіе нѣсколько разъ сряду, получаемъ послѣдовательно стороны многоугольниковъ, имѣющихъ $2n$, $4n$, $8n$... сторонъ. Съ помощію же выраженія § 130 можно опредѣлить стороны соотвѣтственныхъ описанныхъ многоугольниковъ.

§ 132. Задача. *Удвоить число сторонъ правильнаго описаннаго многоугольника.*

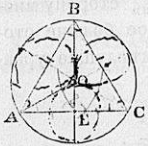
Рѣшеніе. Пусть будетъ $ABCDEF$ (черт. 187) правильный описанный многоугольникъ. Раздѣливъ дуги TN, NP, PQ.... пополамъ, и проведя къ ихъ срединамъ G, H, J... касательныя, составимъ описанный многоугольникъ $abcdef$...., имѣющій вдвое больше сторонъ, нежели многоугольникъ $ABCDEF$. Такъ какъ углы этого многоугольника имѣютъ одинакія мѣры (§ 97), то онъ будетъ равноугольнымъ и, вслѣдствіе этого, правильнымъ (§ 128).



Черт. 187.

Очевидно, что при удвоеніи числа сторонъ периметръ описаннаго многоугольника уменьшается.

§ 133. Задача. *Опредѣлить сторону правильнаго вписаннаго треугольника.*

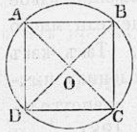


Черт. 188.

Рѣшеніе. Пусть будетъ ABC (чер. 188) равносторонній вписанный треугольникъ. Проведя діаметръ BF и радіусъ OA замѣтимъ, что линія BF дѣлитъ уголъ B пополамъ (§ 126); вслѣдствіе этого треугольники ABE и CBE равны, и линія BE перпендикулярна къ сторонѣ AC. Такъ какъ въ прямоугольныхъ треугольникахъ ABE и AOE углы ABE и OAE, какъ половины равныхъ угловъ, равны, то эти треугольники подобны, и потому $\frac{AB}{AE}=\frac{AO}{OE}$; Но $AE=\frac{AC}{2}=\frac{AB}{2}$ слѣд. $OE=\frac{AO}{2}=\frac{OF}{2}$, т. е. радіусъ OF дѣлится въ точкѣ E пополамъ.

Далѣе изъ прямоугольнаго треугольника AOE находимъ: $AE^2=AO^2-OE^2$, а такъ какъ $AE=\frac{AC}{2}$, то, означивъ радіусъ круга чрезъ r, получимъ: $\frac{AC^2}{4}=r^2-\frac{r^2}{4}=\frac{3r^2}{4}$. Сокративъ на 4 и извлекая квадратный корень, находимъ: $AC=r\sqrt{3}$.

§ 134. Задача. *Опредѣлить сторону вписаннаго квадрата.*



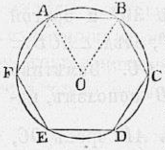
Черт. 189.

Рѣшеніе. Пусть будетъ $ABCD$ (черт. 189) вписанный квадратъ и r радіусъ круга. Проведя діагонали AC и DB и замѣтивъ, что они взаимно перпендикулярны и дѣлятся пополамъ (§ 45), заключаемъ, что точка пересѣченія ихъ совпадаетъ съ центромъ, и что AOB есть прямой уголъ; слѣдов. $AB^2=AO^2+OB^2=2r^2$; и потому $AB=r\sqrt{2}$.

Очевидно, что если проведемъ два перпендикулярныхъ между собою діаметра AC и DB (черт. 189) и соединимъ концы ихъ, то четыреугольникъ $ABCD$, такимъ образомъ составленный, будетъ квадратъ, потому что стороны его, какъ хорды стягивающія равныя дуги, будутъ равны, и каждый изъ его угловъ, опираясь на діаметръ, будетъ прямой.

Зная сторону вписаннаго квадрата, можно, съ помощію выраженія § 131, послѣдовательно опредѣлить стороны правильнаго вписаннаго осмиугольника, шестнадцатиугольника и т. д.

§ 135. Задача. *Опредѣлить сторону правильнаго вписаннаго шестиугольника.*



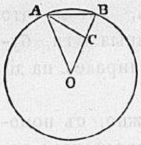
Черт. 190.

Рѣшеніе. Пусть будетъ $ABCDEF$ (ч. 190) правильный вписанный шестиугольникъ. Соединивъ центръ O съ точками A и B, замѣтимъ, что $\angle AOB=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$; слѣд. сумма двухъ угловъ BAO и ABO равна $180^\circ-60^\circ=120^\circ$, а такъ какъ, вслѣдствіе равенства сторонъ OA и OB, эти углы равны, то каждый изъ нихъ равенъ $\frac{120^\circ}{2}=60^\circ$. Изъ этого слѣдуетъ, что AOB есть равносторонній треугольникъ, и что *сторона правильнаго вписаннаго шестиугольника равняется радіусу.*

Изъ сказаннаго заключаемъ, что хорда равная радіусу, стягиваетъ дугу въ 60°, и что на всякой окружности радіусъ откладывается ровно шесть разъ.

Зная сторону правильнаго вписаннаго шестиугольника, можно, съ помощію выраженія (§ 131), послѣдовательно опредѣлить стороны правильнаго двѣнадцатиугольника, двадцатичетырехъугольника и т. д.

§ 136. Задача. *Опредѣлить сторону правильнаго вписаннаго десятиугольника.*



Черт. 191.

Рѣшеніе. Пусть будетъ AB (черт. 191) сторона правильнаго вписаннаго десятиугольника. Соединимъ центръ O съ точками A и B и замѣтимъ, что $\angle AOB = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$. Сумма двухъ угловъ BAO и ABO равна $180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$, а такъ какъ эти углы равны, то каждый изъ нихъ равенъ $\frac{144^\circ}{2} = 72^\circ$. Если же линіею AC раздѣлимъ уголъ OAB пополамъ, то $\angle OAC = \angle AOC = 36^\circ$, и потому $OC = AC$. Далѣе, такъ какъ въ треугольникѣ ABC одинъ уголъ равенъ 36° и другой 72°, то третій уголъ C будетъ равняться 72°, слѣд. $\angle ACB = \angle ABC = 72^\circ$, и потому $AB = AC = OC$. Замѣтивъ теперь, что линія AC дѣлитъ уголъ OAB пополамъ, находимъ (§ 56): $\frac{AO}{AB} = \frac{OC}{CB}$, или, замѣнивъ AB чрезъ OC, имѣемъ: $\frac{OA}{OC} = \frac{OC}{CB}$; но OC равняется сторонѣ вписаннаго десятиугольника AB, слѣдов. *сторона правильнаго вписаннаго десятиугольника равняется большей части радіуса раздѣленнаго въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.*

Если означимъ радіусъ круга чрезъ r и сторону вписаннаго десятиугольника чрезъ a, то $\frac{r}{a} = \frac{a}{r-a}$; составивъ произведеніе среднихъ и крайнихъ членовъ, находимъ: $a^2 = r^2 - ar$, или $a^2 + ar = r^2$, и отсюда:

$$a = -\frac{r}{2} + \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}} = -\frac{r}{2} + \frac{\sqrt{5\,r^2}}{2} = r. \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Зная сторону правильнаго вписаннаго десятиугольника можно, съ помощію выраженія § 131, послѣдовательно опредѣлить стороны правильнаго вписаннаго двадцатиугольника, сорокаугольника и т. д.

Замѣчаніе. На основаніи сказаннаго въ §§ 131, 134, 135 и 136 заключаемъ, что съ помощію линейки и циркуля можно построить: 1) правильный вписанный четыреугольникъ, слѣд. и многоугольники 8, 16.., сторонъ; 2) правильный вписанный треугольникъ и шестиугольникъ, слѣдов. и многоугольники 12, 24... сторонъ, 3) правильный вписанный десятиугольникъ, слѣдов. и многоугольники 20, 40.... сторонъ. Можно также построить правильный вписанный пятнадцатиугольникъ (здача 145), слѣдов. и многоугольники 30, 60... сторонъ.

Гаусъ показалъ возможность построенія, съ помощію линейки и циркуля, правильнаго вписаннаго семнадцатиугольника и вообще всякаго правильнаго вписаннаго многоугольника о $2^n + 1$ сторонахъ, если только $2^n + 1$ есть число первое.

Задачи.

144. Вписать въ кругъ радіуса r правильный пятиугольникъ и опредѣлить сторону его.

145. Вписать въ кругъ радіуса r правильный пятнадцатиугольникъ и опредѣлить сторону его.

146. Опредѣлить радіусъ круга вписаннаго въ квадратъ, если радіусъ описаннаго круга равенъ r.

147. Опредѣлить радіусъ круга вписаннаго въ правильный треугольникъ, если радіусъ описаннаго круга равенъ r.

148. Опредѣлить радіусъ круга вписаннаго въ правильный шестиугольникъ, если радіусъ описаннаго круга равенъ r.

149. Опредѣлить радіусъ круга вписаннаго въ правильный пятиугольникъ, если радіусъ описаннаго круга равенъ r.

150. Опредѣлить радіусъ круга вписаннаго въ правильный десятиугольникъ, если радіусъ описаннаго круга равенъ r.

151. Опредѣлить сторону правильнаго двѣнадцатиугольника описаннаго около круга радіуса r.

152. Опредѣлить сторону правильнаго двѣнадцатиугольника описаннаго около круга радіуса r.

153. Опредѣлить стороны правильнаго восьмиугольника вписаннаго въ кругъ радіуса r и описаннаго около него.

154. Опредѣлить радіусы круга вписаннаго въ квадратъ и описаннаго около него, если сторона квадрата равна a.

155. Опредѣлить радіусы круга вписаннаго въ правильный триугольникъ и описаннаго около него, если сторона триугольника равна a.

156. Опредѣлить радіусы круга вписаннаго въ правильный шестиугольникъ и описаннаго около него, если сторона шестиугольника равна a.

157. Опредѣлить радіусы круга вписаннаго въ правильный пятиугольникъ и описаннаго около него, если сторона пятиугольника равна a.

158. Опредѣлить радіусы круга вписаннаго въ правильный десятиугольникъ и описаннаго около него, если сторона десятиугольника равна a.

159. Опредѣлить радіусы круга вписаннаго въ правильный двѣнадцатиугольникъ и описаннаго около него, если сторона двѣнадцатиугольника равна a.

160. Даны радіусы r и R круга вписаннаго въ правильный многоугольникъ и описаннаго около него,—опредѣлить радіусъ круга, вписнанаго въ многоугольникѣ того же периметра, но имѣющаго вдвое болѣе сторонъ и радіусъ круга описаннаго около этого многоугольника.

ГЛАВА VII.

Измѣреніе площадей.

Измѣреніе площадей прямолинейныхъ фигуръ. Нѣкоторыя предложенія о триугольникахъ, четыреугольникахъ и правильныхъ многоугольникахъ. Съемка плана. Задачи.

Измѣреніе площадей прямолинейныхъ фигуръ.

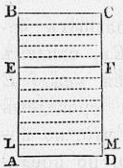
§ 137. Часть плоскости, занимаемая какою-нибудь фигурою, называется *площадью* этой фигуры. ***Измѣрить*** площадь значитъ сравнить ее съ другой извѣстной площадью, принятой за единицу. За единицу площади

принимаютъ площадь квадрата, котораго сторона равна единицѣ, и эта площадь называется *квадратной единицею.* Вслѣдствіе этого, измѣрить площадь какой-нибудь фигуры, значитъ найти отношеніе этой площади къ квадратной единицѣ.

Двѣ фигуры, имѣющія равныя площади, называются *равновеликими.*

Опредѣленіе площадей прямолинейныхъ фигуръ основывается на слѣдующемъ предложеніи:

§ 138. Теорема. ***Площади двухъ прямоугольниковъ, имѣющихъ одинакія основанія, относятся между собою какъ высоты.***



Черт. 192.

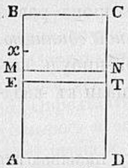
Положимъ, что $ABCD$ и $AEFD$ (черт. 192) суть два прямоугольника, имѣющіе общее основаніе AD; требуется доказать, что

$$\frac{ABCD}{AEFD} = \frac{AB}{AE}.$$

Доказ. Разсмотримъ два случая:

1-й случай. Положимъ, что высоты AB и AE соизмѣримы, и что общая мѣра AL содержится m разъ въ AB и n разъ въ AE, такъ что $\frac{AB}{AE} = \frac{m}{n}$. Если чрезъ всѣ точки дѣленія стороны AB проведемъ линіи параллельныя сторонѣ AD, то прямоугольникъ $ABCD$ раздѣлится на m, а прямоугольникъ $AEFD$ на n равныхъ прямоугольниковъ (§ 43); слѣдов. $\frac{ABCD}{AEFD} = \frac{m}{n}$, и потому

$$\frac{ABCD}{AEFD} = \frac{AB}{AE}.$$



Черт. 193.

2-й случай. Положимъ, что высоты AB и AE (черт. 193) несоизмѣримы. Въ этомъ случаѣ справедливость пропорціи $\frac{ABCD}{AEFD} = \frac{AB}{AE}$ можно обнаружить, доказывая, что отношеніе $\frac{ABCD}{AEFD}$ не можетъ быть ни меньше ни больше отношенія $\frac{AB}{AE}$.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\frac{ABCD}{AEFD} < \frac{AB}{AE}$. Вмѣсто AE возьмемъ большую величину Ax, такъ чтобы:

$$\frac{ABCD}{AEFD} = \frac{AB}{Ax}.$$

Раздѣливъ линію AB на такое число равныхъ частей, чтобы каждая часть была меньше Ex, найдемъ по крайней мѣрѣ одну изъ точекъ дѣленія между E и x; пусть будетъ M такая точка. Если проведемъ MN параллельно линіи AD и замѣтимъ, что, по построенію, линіи AB и AM соизмѣримы, то, по предъидущему, будемъ имѣть:

$$\frac{ABCD}{AMND} = \frac{AB}{AM}.$$

Раздѣливъ эту пропорцію на предъидущую, находимъ:

$$\frac{AEFD}{AMND} = \frac{Ax}{AM}.$$

Но эта пропорція не вѣрна, потому что отнош. $\frac{AEFD}{AMND} < 1$, а отношеніе $\frac{Ax}{AM} > 1$. Изъ этого слѣдуетъ, что допущеніе $\frac{ABCD}{AEFD} = \frac{AB}{Ax}$ или, что все равно, допущеніе $\frac{ABCD}{AEFD} < \frac{AB}{AE}$ приводитъ къ противурѣчію, и потому оно не справедливо.

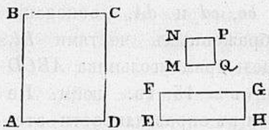
Подобнымъ же образомъ можно доказать, что $\frac{ABCD}{AEFD}$ не можетъ быть и больше $\frac{AB}{AE}$; для этого стоитъ только вмѣсто AE взять меньшую величину и повторить предъидущія разсужденія.

И такъ, въ случаѣ несоизмѣримости, также какъ въ случаѣ соизмѣримости, имѣемъ:

$$\frac{ABCD}{AEFD} = \frac{AB}{AE}.$$

Такъ какъ каждая изъ сторонъ прямоугольника можетъ быть разсматриваема какъ высота, а перпендикулярная къ ней — какъ основаніе, то изъ предъидущаго предложенія слѣдуетъ: *площади прямоугольниковъ, имѣющихъ одинакія высоты, относятся между собою какъ основанія.*

§ 139. **Теорема.** *Площадь прямоугольника равняется произведенію основанія на высоту.*



Черт. 194.

Пусть будетъ $ABCD$ (чер. 194) какой нибудь прямоугольникъ, котораго основаніе AD означимъ чрезъ b и высоту AB чрезъ h, и $MNPQ$ квадратъ, котораго сторона равна единицѣ; требуется доказать, что

$$\frac{ABCD}{MNPQ} = b.h.$$

Доказ. Вообразимъ прямоугольникъ $EFGH$, котораго основаніе EH равняется основанію AD прямоугольника $ABCD$, и высота EF равна сторонѣ квадрата $MNPQ$; тогда, по предъидущему §:

$$\frac{ABCD}{EFGH} = \frac{AB}{EF} \text{ и } \frac{EFGH}{MNPQ} = \frac{EH}{MN}.$$

Перемноживъ эти пропорціи, находимъ:

$$\frac{ABCD}{MNPQ}=\frac{AB.\,EH}{EF.\,MN}.$$

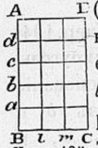
Но, по положенію, $AB = h$; $EH = b$; $EF = MN = 1$; слѣдов.

$$\frac{ABCD}{MNPQ}=b.h.$$

Такъ какъ при измѣреніи площадей квадратъ $MNPQ$ принимается за единицу, то

$$ABCD = b.h.$$

Это значитъ, что число квадратныхъ единицъ, заключающихся въ площади прямоугольника, равняется произведенію основанія на высоту, предполагая, что основаніе и высота выражены въ линейныхъ единицахъ, равныхъ сторонѣ квадратной единицы. Это предложеніе выражается сокращенно такъ: *площадь прямоугольника равна произведенію основанія на высоту.*



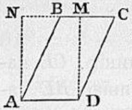
Черт. 195.

Положимъ напр., что высота прямоугольника $ABCD$ (черт. 195) содержитъ 5 дюймовъ, изображенныхъ частями Ba, ab, bc, cd и dA, а основаніе его 3 дюйма, изображенныхъ частями Bl, lm и mC; тогда площадь прямоугольника $ABCD$ равна 3. 5 кв. дюймъ = 15 кв. дюйм. Не трудно удостовѣриться въ справедливости этого вывода, проведя чрезъ точки a, b, c и d линіи параллельныя сторонѣ BC, а чрезъ точки l и m линіи параллельныя сторонѣ AB; прямоугольникъ раздѣлится такимъ образомъ на 15 равныхъ квадратовъ, изъ которыхъ каждый представляетъ квадратную единицу.

Очевидно, что площадь квадрата, котораго сторона есть a, равняется $a.\ a$ или a^2; вслѣдствіе этого вторую степень какого нибудь количества называютъ квадратомъ.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что если отношеніе двухъ линейныхъ единицъ есть m, то отношеніе тѣхъ же квадратныхъ единицъ будетъ m^2. Такъ напр. отношеніе линейныхъ единицъ: сажени и аршина, есть 3; отношеніе же квадратной сажени и квадратнаго аршина будетъ 3^2 т. е. 9.

§ 140. **Теорема.** *Площадь всякаго параллелограмма равняется произведенію основанія на высоту.*



Черт. 196.

Пусть бутетъ $ABCD$ (черт. 196) параллелограммъ, котораго основаніе AD означимъ чрезъ b, а высоту чрезъ h; требуется доказать что площадь параллелограмма $ABCD$ равна $b\ h$.

Доказ. Если изъ точекъ A и D возставимъ перпендикуляры къ сторонѣ AD и продолжимъ противуположную сторону BC, то составится прямоугольникъ $ANMD$, который имѣетъ съ параллелограммомъ $ABCD$ общее основаніе и одинакую высоту; слѣдов , по предъидущему §, $ANMD = b.\ h.$ Но прямоугольные треугольники ANB и DMC равны, потому что стороны AN и AB соотвѣтственно равны сторонамъ DM и DC, какъ параллели между параллелями (§ 37); если же къ каждому изъ этихъ треугольниковъ прибавимъ по площади $ABMD$, то найдемъ, что паралелограммъ $ABCD$ равновеликъ прямоугольнику $ANMD$; слѣдов.

$$ABCD = b.\ h.$$

Изъ этого предложенія слѣдуетъ:

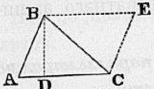
1) Площади двухъ параллелограммовъ относятся между собою какъ произведенія ихъ основаній на высоты.

2) Площади двухъ параллелограммовъ съ равными основаніями относятся какъ высоты.

3) Площади двухъ параллелограммовъ съ равными высотами относятся какъ основанія.

4) Два параллелограмма съ равными основаніями и высотами равновелики.

§ 141. ТЕОРЕМА. *Площадь треугольника равняется половинѣ произведенія его основанія на высоту.*



Черт. 197.

Пусть будетъ ABC (черт. 197) какой нибудь треугольникъ, котораго основаніе AC означимъ чрезъ b, а высоту BD чрезъ h; требуется доказать, что площадь треугольника ABC равна $\frac{b.\,h}{2}$.

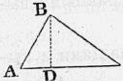
Доказ. Если изъ точки C проведемъ линію CE параллельно сторонѣ AB, а изъ точки B линію BE параллельно сторонѣ AC, то составится параллелограммъ $ABEC$, котораго площадь, по § 140, равна $b.\ h$. Но такъ какъ треугольникъ ABC есть половина параллелограмма $ABEC$ (§ 44), то

$$ABC = \frac{b.h}{2}.$$

Изъ этого предложенія слѣдуетъ:

1. Треугольникъ есть половина параллелограмма, имѣющаго съ нимъ одинакое основаніе и одинакую высоту.
2. Площади двухъ треугольниковъ относятся между собою какъ произведенія ихъ основаній на высоты.
3. Площади двухъ треугольниковъ, имѣющихъ одинакое основаніе, относятся какъ высоты.
4. Площади двухъ треугольниковъ, имѣющихъ одинакую высоту, относятся какъ основанія.
5. Два треугольника, имѣющіе одинаковое основаніе и одинаковую высоту, равновелики.
6. Площадь прямоугольнаго треугольника равняется половинѣ произведенія его катетовъ.

§ 142. ЗАДАЧА. *Опредѣлить площадь треугольника по тремъ даннымъ сторонамъ его.*



Черт. 198.

Рѣшеніе. Пусть будетъ ABC (черт. 198) какой нибудь треугольникъ; означимъ площадь его чрезъ $\triangle$ и положимъ $BC = a$; $AC=b$;

$AB = c$. Проведя высоту BD, находимъ изъ прямоугольнаго треугольника ABD:

$BD^2 = AB^2 - AD^2 = c^2 - AD^2$, а изъ треугольника ABC (§ 59):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b.\,AD, \text{ или } AD = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b};$$

слѣдов.

$$BD^3 = c^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2} = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2}.$$

Замѣнивъ разность квадратовъ чрезъ произведеніе суммы на разность, находимъ

$$BD^2 = \frac{[2bc + (b^2 + c^2 - a^2)]\ [2bc - (b^2 + c^2 - a^2)]}{4b^2}.$$

Замѣтивъ, что

$$2bc + (b^2+c^2-a^2) = 2bc + b^2 + c^2 - a^2 = (b+c)^2 - a^2$$
$$= (b + c + a)\ (b + c - a);$$
$$2bc - (b^2+c^2 - a^2) = 2bc - b^2 - c^2 + a^2 = a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)$$
$$= a^2 - (b - c)^3 = (a + b - c)\ (a + c - b),$$

находимъ:

$$BD^2 = \frac{(a + b + c)\ (b + c - a)\ (a + c - b)\ (a + b - c)}{4b^2},$$

и отсюда

$$BD = \frac{\sqrt{(a + b + c)\,(b + c - a)\,(a + c - b)\,(a + b - c)}}{2b.}.$$

Опредѣливъ высоту BD треугольника, находимъ

$$\triangle = \frac{AC.\ BD}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$

Съ помощію этого выраженія опредѣляется площадь треугольника по тремъ даннымъ сторонамъ его.

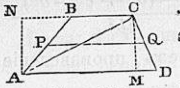
Это выраженіе можно представить въ другомъ видѣ, означивъ периметръ треугольника чрезъ $2p$, т. е. положивъ $a + b + c = 2p$; тогда

$$b + c - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2\,(p - a);$$
$$a + c - b = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2\,(p - b);$$
$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2\,(p - c).$$

Вставивъ въ предъидущее выраженіе площади треугольника, находимъ:

$$\triangle = \sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}.$$

§ 143. ТЕОРЕМА. *Площадь трапеціи равняется полусуммѣ параллельныхъ сторонъ умноженной на высоту.*



Черт. 199.

Пусть будетъ $ABCD$ (черт. 199) какая нибудь трапеція и CM ея высота; требуется доказать, что площадь трапеціи $ABCD$ равна $\frac{(AD + BC)\ CM}{2}$.

Доказ. Проведя діагональ AC и опустивъ изъ точки A перпендикуляръ AN на продолженіе стороны CB, находимъ (§ 141):

$$\triangle ACD = \frac{AD.\ CM}{2} \text{ и } \triangle ABC = \frac{BC.AN}{2}.$$

Сложивъ эти равенства и замѣтивъ, что $AN = CM$, и что $\triangle ACD + \triangle ABC = ABCD$, находимъ:

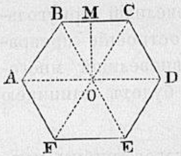
$$ABCD = \frac{AD.\ CM}{2} + \frac{BC.\ AN}{2} = \frac{(AD+BC)\ CM}{2}.$$

Если чрезъ средину P стороны AB проведемъ линію PQ параллельно сторонѣ AD, то $PQ = \frac{AD + BC}{2}$ (§ 46), слѣдов.

$$ABCD = PQ.\ CM;$$

т. е. *площадь трапеціи равняется средней линіи умноженной на высоту.*

§ 144. ТЕОРЕМА. *Площадь правильнаго многоугольника равняется половинѣ произведенія периметра на апоѳему.*

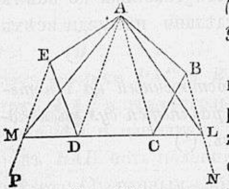


Черт. 200.

Пусть будетъ $ABCDEF$ (черт. 200) правильный многоугольникъ о n сторонахъ, O его центръ и OM апоѳема; требуется доказать, что площадь многоугольника равна $n\ BC.\ \frac{OM}{2}$.

Доказ. Соединивъ точку O съ точками $A, B, C, D\ldots$, замѣтимъ, что треугольники AOB, BOC, $COD\ldots$ равны между собою (§ 126); но такъ какъ $\triangle BOC = \frac{BC.\ OM}{2}$, то $ABCDEF = n\,BC.\,\frac{OM}{2}$.

§ 145 ЗАДАЧА. *Превратить многоугольникъ ABCDE (черт. 201) въ равновеликій треугольникъ.*



Черт. 201.

Рѣшеніе. Проведя діагональ AC, и чрезъ точку B линію BN параллельно діагонали AC, продолжимъ сторону DC до пересѣченія съ линіею BN въ точкѣ L, затѣмъ соединимъ точки A и L. Треугольники ABC и ALC имѣютъ общее основаніе AC, и такъ какъ вершины ихъ B и L лежатъ на линіи BN параллельной ихъ основанію, то эти треугольники имѣютъ также одинакія высоты, и потому они равновелики (§ 141 слѣдсв. 5). Изъ этого слѣдуетъ, что пятиугольникъ $ABCDE$ ровновеликъ четыреугольнику $ALDE$.

Проведя затѣмъ діагональ AD, и чрезъ точку E линію EP параллельно діагонали AD, продолжимъ сторону CD до пересѣченія съ линіею EP въ точкѣ M, и соединимъ точки M и A; треугольники ADE и ADM равновелики, и потому четыреугольникъ $ALDE$ равновеликъ треугольнику MAL.

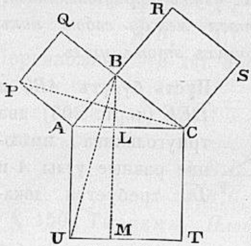
Сколько бы сторонъ ни имѣлъ данный многоугольникъ мы всегда можемъ, повторяя нѣсколько разъ подобное построеніе, превратить его въ равновеликій треугольникъ, потому что каждое подобное построеніе превращаетъ многоугольникъ въ другой равновеликій многоугольникъ, число сторонъ котораго будетъ единицею меньше.

§ 146. Чтобъ опредѣлить площадь какого нибудь многоугольника можно превратить его въ равновеликій треугольникъ и опредѣлить площадь этого треугольника. Но можно также разбить многоугольникъ на треугольники діагоналями, проведенными изъ вершины какого нибудь угла, или линіями, проведенными отъ какой нибудь внутренней точки многоугольника ко всѣмъ вершинамъ его, и опредѣлить отдѣльно площади всѣхъ этихъ треугольниковъ.

§ 147. Теорема. *Квадратъ, построенный на гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника равняется суммѣ квадратовъ построенныхъ на катетахъ.* (*)

(*) Это предложеніе извѣстно подъ названіемъ: *Пиѳагоровой теоремы*, потому что открытіе его приписывается *Пиѳагору*. Оно называется также *magister matheseos*, потому что въ прежнее время оно часто предлагалось въ Университетахъ на магистерскихъ экзаменахъ. Другое названіе его: *Inventum hecatombe dignum* относится къ легендѣ, что Пиѳагоръ за открытіе этой теоремы приносъ музамъ Гекатомбу т. е жертву въ 100 быковъ.

Если два катета прямоугольнаго треугольника соотвѣтственно равны 3 и 4, то гипотенуза будетъ равняться 5, потому что $3^2 + 4^2 = 5^2$. Этотъ треугольникъ есть знаменитый Египетскій треугольникъ, въ которомъ катетъ 3 означаетъ Osiris, другой катетъ 4 — Isis, а гипотенуза 5 — Horus. Вѣроятно, что Пиѳагоръ въ своихъ дальнихъ путешествіяхъ узналъ отъ Египетскихъ жрецовъ объ этомъ треугольникѣ и что комбинація чиселъ 3, 4 и 5 навела его на открытіе общей теоремы.



Черт. 202.

Пусть будетъ ABC (черт. 202) прямоугольный треугольникъ, $ACTU$, $BRSC$ и $APQB$ квадраты, построенные на гипотенузѣ и на катетахъ; требуется доказать, что

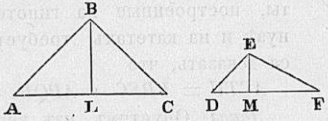
$$ACTU = BRSC + APQB.$$

Доказ. Опустимъ изъ вершины прямаго угла перпендикуляръ BM на гипотенузу и проведемъ линіи CP и BU. Такъ какъ каждый изъ двухъ угловъ PAC и BAU состоитъ изъ прямаго угла сложеннаго съ угломъ BAC, то эти углы равны; кромѣ того $PA = AB$ и $AC = AU$, какъ стороны квадрата; слѣдов. треугольники PAC и BAU равны (§ 15). Но треугольникъ BAU и прямоугольникъ $ALMU$ имѣютъ общее основаніе AU и одинакую высоту AL, и потому треугольникъ BAU есть половина прямоугольника $ALMU$ (§ 141 слѣдст. 1); равнымъ образомъ треугольникъ PAC и квадратъ $APQB$ имѣютъ общее основаніе AP и одинакую высоту BA; и потому треугольникъ PAC есть половина квадрата $APQB$. Изъ равенства же треугольниковъ BAU и PAC слѣдуетъ, что квадратъ $APQB$ и прямоугольникъ $ALMU$ равновелики.

Подобнымъ же образомъ можно доказать, что квадратъ $BRSC$ и прямоугольникъ $CLMT$ равновелики. Отсюда слѣдуетъ, что сумма двухъ квадратовъ $APQB$ и $BRSC$ равна квадрату $ACTU$.

Такъ какъ площадь квадрата, построеннаго на какой нибудь линіи a, равняется алгебраическому выраженію a^2, то предложеніе доказанное въ этомъ § тождественно съ предложеніемъ доказаннымъ въ § 58 спомощію пропорціональныхъ линій.

§ 148. **Теорема.** *Площади двухъ треугольниковъ, имѣющихъ общій уголъ, относятся между собою какъ произведенія сторонъ, заключающихъ этотъ уголъ.*

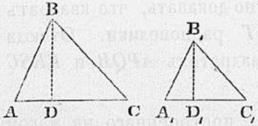


Черт. 203.

Пусть будутъ ABC и DEF (черт. 203) два треугольника, имѣющіе равные углы A и D; требуется доказать, что $\frac{ABC}{DEF}=\frac{AC.AB}{DF.DE}$.

Доказ. Проведя высоты BL и EM, находимъ (§ 141 слѣдс. 2) $\frac{ABC}{DEF}=\frac{AC.BL}{DF.EM}$. Но прямоугольные треугольники ABL и DEM, имѣющіе по равному острому углу A и D подобны, слѣдов. $\frac{BL}{EM}=\frac{AB}{DE}$. Вставивъ въ предъидущее уравненіе вмѣсто отношенія $\frac{BL}{EM}$ отношеніе $\frac{AB}{DE}$, находимъ: $\frac{ABC}{DEF}=\frac{AC.AB}{DF.DE}$.

§ 149. **Теорема.** *Площади подобныхъ треугольниковъ относятся между собою какъ квадраты сходственныхъ сторонъ.*



Черт. 204.

Пусть будутъ ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 204) два подобныхъ треугольника; требуется док. что $\frac{ABC}{A_1B_1C_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}$.

Доказ. Проведя высоты BD и B_1D_1, находимъ: $\frac{ABC}{A_1B_1C_1}=\frac{AC\,.\,BD}{A_1C_1\,.\,B_1D_1}$ (§ 141 слѣдст. 2). Но изъ подобія треугольниковъ слѣдуетъ:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1} \text{ и } \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BD}{B_1D_1}.$$

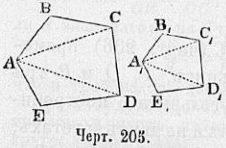
Перемноживъ эти двѣ пропорціи, находимъ:

$$\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{AC\,.\,BD}{A_1C_1.\,B_1D_1};$$

слѣдов.

$$\frac{ABC}{A_1B_1C_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}.$$

§ 150. **Теорема.** *Площади подобныхъ многоугольниковъ относятся какъ квадраты сходственныхъ сторонъ.*



Черт. 205.

Пусть будутъ $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (черт. 205) два подобныхъ многоугольника; требуется док., что

$$\frac{ABCDE}{A_1B_1C_1D_1E_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}.$$

Доказ. Проведя изъ точекъ A и A_1 діагонали къ всѣмъ вершинамъ многоугольниковъ, и замѣтивъ, что эти линіи дѣлятъ многоугольники на треугольники соотвѣтственно подобные (§ 64), находимъ (§ 149):

$$\frac{ABC}{A_1B_1C_1}=\frac{BC^2}{B_1C_1^2};\ \frac{ACD}{A_1C_1D_1}=\frac{CD^2}{C_1D_1^2};\ \frac{DAE}{D_1A_1E_1}=\frac{ED^2}{E_1D_1^2}.$$

Но (§ 62)

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{ED}{E_1D_1};$$

слѣдов.

$$\frac{ABC}{A_1B_1C_1}=\frac{ACD}{A_1C_1D_1}=\frac{DAE}{D_1A_1E_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2};$$

и отсюда:

$$\frac{ABC+ACD+DAE}{A_1B_1C_1+A_1C_1D_1+D_1A_1E_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2},$$

или

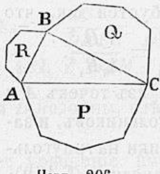
$$\frac{ABCDE}{A_1B_1C_1D_1E_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}.$$

Изъ этого предложенія слѣдуетъ:

1) Площади правильныхъ одноименныхъ многоугольниковъ относятся между собою какъ квадраты радіусовъ вписанныхъ или описанныхъ круговъ.

2) Площади двухъ правильныхъ одноименныхъ многоугольниковъ, изъ которыхъ одинъ описанъ около круга, а другой вписанъ въ этотъ кругъ, относятся между собою какъ квадратъ радіуса къ квадрату апоѳемы.

§ 151. Теорема. *Многоугольникъ, построенный на гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, равенъ суммѣ подобныхъ ему многоугольниковъ, построенныхъ на двухъ катетахъ.*



Черт. 206.

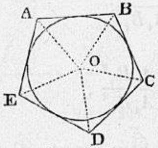
Пусть будутъ ABC (черт. 206) прямоугольный треугольникъ, P, Q и R три подобныхъ многоугольника, построенныхъ на гипотенузѣ и на двухъ катетахъ; требуется доказать, что $P = Q + R$.

Доказ. По § 150 имѣемъ:

$$\frac{Q}{P} = \frac{BC^2}{AC^2} \text{ и } \frac{R}{P} = \frac{AB^2}{AC^2};$$

сложивъ эти дроби, находимъ $\dfrac{Q+R}{P} = \dfrac{BC^2 + AB^2}{AC^2}$; но такъ какъ $BC^2 + AB^2 = AC^2$, то $Q + R = P$.

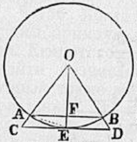
§ 152. Теорема. *Площадь какого нибудь описаннаго многоугольника* $ABCDE$ (черт. 207) *равняется половинѣ произведенія периметра на радіусъ круга.*



Черт. 207.

Доказ. Соединивъ центръ круга O съ вершинами описаннаго многоугольника, раздѣлимъ его на треугольники, которые имѣютъ одинакія высоты, равныя радіусу круга. Если же означимъ периметръ многоугольника чрезъ p и радіусъ круга чрезъ r, то $ABCDE = \dfrac{pr}{2}$.

§ 153. Теорема. *Площадь правильнаго вписаннаго многоугольника есть средняя пропорціональная между площадями вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ, имѣющихъ вдвое менѣе сторонъ.*



Черт. 208.

Доказ. Пусть будутъ AB (черт. 208) сторона правильнаго вписаннаго многоугольника, имѣющаго n сторонъ, и E_n площадь его; CD сторона описаннаго многоугольника, имѣющаго также n сторонъ, и U_n площадь его, наконецъ AE сторона вписаннаго многоугольника, имѣющаго $2n$ сторонъ, и E_{2n} площадь его; тогда

$$E_n = n.AOB = 2n\ AOF;$$

$$U_n = n.COD = 2n.COE;\ E_{2n} = 2n.AOE.$$

Но, по § 141 слѣдс. 4,

$$\frac{AOF}{AOE} = \frac{OF}{OE};\ \frac{AOE}{COE} = \frac{OA}{OC};$$

а такъ какъ $\dfrac{OF}{OE} = \dfrac{OA}{OC}$, то $\dfrac{AOF}{AOC} = \dfrac{AOE}{COE}$. Помноживъ числители и знаменатели на $2n$, находимъ:

$$\frac{E_n}{E_{2n}} = \frac{E_{2n}}{U_n} \text{ или } E^2{}_{2n} = E_n.\, U_n,$$

что и требовалось доказать.

Пусть будутъ p_n и P_n периметры вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ, имѣющихъ n сторонъ, K апоѳема и r радіусъ круга; тогда (§ 144)

$$E_n = p_n.\frac{K}{2};\ U_n = P_n.\frac{r}{2}.$$

Перемноживъ, находимъ $E_n.\ U_n = p_n P_n.\ \dfrac{K\ r}{4}$. Но $\dfrac{P_n}{p_n} = \dfrac{r}{K}$ (§ 129 слѣдствіе), отсюда $K = \dfrac{rp_n}{P_n}$; вставляя, получимъ

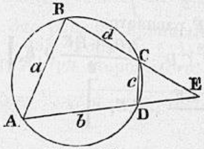
$$E_n\ U_n = p_n{}^2.\frac{r^2}{4},$$

а такъ какъ, по предъидущему, $E_n U_n = E^2{}_{2n}$, то находимъ $E_{2n}{}^2 = p_n{}^2.\dfrac{r^2}{4}$, и извлекая квадратный корень, получимъ:

$$E_{2n} = \frac{p_n\, .\, r}{2},$$

т. е. *площадь правильнаго вписаннаго многоугольника равна половинѣ произведенія радіуса на периметръ вписаннаго многоугольника, имѣющаго вдвое менѣе сторонъ.*

§ 154 Задача. *По даннымъ четыремъ сторонамъ вписаннаго четыреугольника опредѣлить площадь его.*



Черт. 149

Рѣшеніе. Пусть будетъ $ABCD$ (черт. 149) вписанный четыреугольникъ, и положимъ $AB=a$, $AD=b$, $CD=c$ и $BC=d$. Продолживъ стороны BC и AD до пересѣченія въ точкѣ E, находимъ, что треугольники ABE и CDE подобны (§ 109); слѣдов. $\dfrac{ABE}{DCE} = \dfrac{a^2}{c^2}$, и отсюда:

$$\frac{ABE-DCE}{ABE}=\frac{a^2-c^2}{a^2} \text{ или } \frac{ABCD}{ABE}=\frac{a^2-c^2}{a^2}.$$

Но, по § 109,

$$AE+BE=\frac{a(b+d)}{a-c};\quad AE-BE=\frac{a(b-d)}{a+c};$$

Слѣдов.

$$AE+BE-AB=\frac{a(b+d)}{a-c}-a=\frac{a(c+b+d-a)}{a-c};$$

$$AB+BE-AE=a-\frac{a(b-d)}{a+c}=\frac{a(a+c+d-b)}{a+c};$$

$$AB+BE+AE=a+\frac{a(b+d)}{a-c}=\frac{a(a+b+d-c)}{a-c};$$

$$AB+AE-BE=a+\frac{a(b-d)}{a+c}=\frac{a(a+b+c-d)}{a+c}.$$

Вслѣдствіе этого находимъ (§ 142):

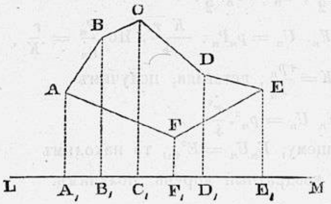
$$ABE=\frac{a^2}{4(a^2-c^2)}\sqrt{c+b+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)},$$

и потому

$$ABCD=\frac{a^2-c^2}{a^2}.ABE=$$

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{(c+b+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)}.$$

§ 155. Вмѣсто способа § 146 для опредѣленія площади многоугольника можно употребить и слѣдующій, въ практическомъ отношеніи, болѣе удобный пріемъ. Пусть будетъ $ABCDEF$ (черт. 209) какой нибудь многоугольникъ. Проведя произвольную линію LM и опустивъ на нее перпендикуляры изъ вершинъ всѣхъ угловъ многоугольника, находимъ:



Черт. 209.

$$A_1ABCDEE_1=\frac{AA_1+BB_1}{2}.A_1B_1+\frac{BB_1+CC_1}{2}.B_1C_1$$

$$+\frac{CC_1+DD_1}{2}.C_1D_1+\frac{DD_1+EE_1}{2}.D_1E_1;$$

$$A_1AFEE_1=\frac{AA_1+FF_1}{2}.A_1F_1+\frac{FF_1+EE_1}{2}E_1F_1;$$

слѣдов. площадь многоугольника $ABCDEF$ равняется:

$$\left[\frac{AA_1+BB_1}{2}.A_1B_1+\frac{BB_1+CC_1}{2}.B_1C_1+\frac{CC_1+DD_1}{2}.C_1D_1+\frac{DD_1+EE}{2}.D_1E_1\right]$$

$$-\left[\frac{AA_1+FF_1}{2}.A_1F_1+\frac{FF_1+EE_1}{2}.F_1E_1\right].$$

Нѣкоторыя предложенія о треугольникахъ, четыреугольникахъ и правильныхъ многоугольникахъ.

§ 156. Когда три цѣлыя числа могутъ быть приняты за стороны прямоугольнаго треугольника, какъ на пр. числа 5, 4 и 3 въ Египетскомъ треугольникѣ, то съ помощію ихъ можно найти безчисленное множество другихъ цѣлыхъ чиселъ, которыя также могутъ представить стороны прямоугольнаго треугольника. Въ самомъ дѣлѣ, означая чрезъ r произвольное цѣлое число, будемъ имѣть $(5r)^2=(4r)^2+(3r)^2$, такъ что $5r$, $4r$ и $3r$ могутъ быть приняты за стороны прямоугольнаго треугольника, какое бы цѣлое число r ни означало. Но кромѣ прямоугольнаго треугольника, котораго стороны соотвѣтственно равны числамъ 5, 4 и 3, или пропорціональны этимъ числамъ, есть безчисленное множество прямоугольныхъ треугольниковъ, которыхъ стороны выражаются цѣлыми числами, не имѣющими общаго множителя. Такіе треугольники называются *Пиѳагоровыми* или *раціональными*.

Пусть будутъ a гипотенуза, b и c катеты прямоугольнаго треугольника; опредѣлимъ всѣ цѣлыя значенія a, b и c, удовлетворяющія уравненію $a^2=b^2+c^2$.

Замѣтивъ, что $c^2=a^2-b^2=(a+b\,.\,a-b$ и означивъ чрезъ m и n какія нибудь цѣлыя числа, положимъ

$$a+b=2m^2 \text{ и } a-b=2n^2;$$

находимъ

$$c^2=4m^2n^2, \text{ или } c=2mn.$$

Изъ уравненій же $a+b=2m^2$ и $a-b=2n^2$ получаемъ $a=m^2+n^2$ и $b=m^2-n^2$. Три выраженія:

$$a=m^2+n^2;\ b=m^2-n^2;\ c=2mn,$$

въ которыхъ m и n означаютъ совершенно произвольныя цѣлыя числа, представляютъ всѣ возможныя стороны Пиѳагоровыхъ треугольниковъ. Подставляя вмѣсто m и n разныя цѣлыя числа, найдемъ соотвѣтственныя величины для a, b и c. Такъ на пр., принимая $m=3$ и $n=2$, получаемъ $a=13$, $b=5$ и $c=12$; очевидно, что $13^2=5^2+12^2$.

Если положимъ $n=1$ и подъ m будемъ разумѣть нечетное число, то, исключивъ общій множитель 2, найдемъ

$$a=\frac{m^2+1}{2};\ b=\frac{m^2-1}{2};\ c=m.$$

Это рѣшеніе приписывается Пиѳагору.

Если же положимъ $n=1$ и $2m=t$, такъ что t будетъ четное число, то

$$a=\left(\frac{t}{2}\right)^2+1;\ b=\left(\frac{t}{2}\right)^2-1;\ c=t.$$

Это рѣшеніе приписывается Платону.

§ 157. Формула § 142, выражающая площадь треугольника чрезъ три стороны его,

$$\triangle=\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c\quad a+b-c\quad a+c-b\ (b+c-a)}$$

была извѣстна почти всѣмъ древнимъ народамъ; но строгое доказательство ея мы встрѣчаемъ въ первый разъ только въ геодезіи греческаго геометра *Hero* изъ Александріи, (во второмъ столѣтіи до Р. Х.). Всѣ древніе писатели, касавшіеся этой формулы, прилагали ее постоянно къ треугольнику, котораго стороны соотвѣтственно равны 13, 14 и 15, и площадь котораго выражается цѣлымъ числомъ 84. Но кромѣ этого треугольника есть безчисленное множество другихъ треугольниковъ, которыхъ стороны и площадь также выражаются цѣлыми числами.

Опредѣлимъ цѣлыя значенія сторонъ a, b и c, при которыхъ площадь треугольника выражается цѣлымъ числомъ.

Разумѣя подъ a, b и c цѣлыя числа, положимъ:

$$\frac{b+c-a}{2}=\lambda.t_1;\ \frac{a+c-b}{2}=\lambda.t_2;\ \frac{a+b-c}{2}=\lambda.t_3,$$

гдѣ λ, t_1, t_2 и t_3 означаютъ или цѣлыя числа или такія дробныя числа, при которыхъ произведенія $\lambda.t_1$, $\lambda.t_2$ и $\lambda.t_3$ суть цѣлыя.

Сложивъ эти уравненія, находимъ:

$$\frac{a+b+c}{2}=\lambda.(t_1+t_2+t_3),$$

и вставляя въ выраженіе площади треугольника, получаемъ:

$$\triangle=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}.\frac{a+b-c}{2}.\frac{a+c-b}{2}.\frac{b+c-a}{2}}$$

$$=\sqrt{(t_1+t_2+t_3).t_1.t_2.t_3.\lambda^4}.$$

Чтобы $\triangle$ было число цѣлое — выраженіе подъ радикаломъ должно быть полнымъ квадратомъ, а для этого нужно, чтобы произведеніе $(t_1+t_2+t_3).\ t_1.\ t_2$ представляло полный квадратъ, умноженный на производителя t_3, т. е. чтобы

$$(t_1+t_2+t_3).\ t_1.\ t_2=t^2.\ t_3,$$

гдѣ чрезъ t означаемъ какое нибудь цѣлое число. Изъ уравненія

$$(t_1+t_2+t_3).\ t_1.\ t_2=t^2.\ t_3$$

находимъ

$$t_3=\frac{(t_1+t_2).\ t_1.\ t_2}{t^2-t_1.\ t_2},$$

а изъ уравненій:

$$\frac{b+c-a}{2}=\lambda.t_1;\ \frac{a+c-b}{2}=\lambda.t_2;\ \frac{a+b-c}{2}=\lambda.t_3$$

получаемъ:

$$a=\lambda.(t_2+t_3)=\lambda.t_2+\lambda.t_3=\lambda.t_2+\frac{(t_1+t_2)\,t_1.\ t_2.\ \lambda}{t^2-t_1\,t_2}=\frac{(t^2+t_1^2)\,t_2.\ \lambda}{t^2-t_1.\ t_2}$$

$$b=\lambda.(t_1+t_3)=\lambda.t_1+\lambda.t_3=\lambda.t_1+\frac{(t_1+t_2)\,t_1\,t_2.\ \lambda}{t^2-t_1\,t_2}=\frac{(t^2+t_2^2)\,t_1.\ \lambda}{t^2-t_1.\ t_2}$$

$$c=(t_1+t_2).\ \lambda.$$

Если эти величины a, b и c подставимъ въ выраженіе $\triangle$, то подкоренная величина обратится въ полный квадратъ. Но

такъ какъ $\triangle$, также какъ и a, b и c, по условію, должны быть цѣлыми, то, разсматривая t, t_1 и t_2 какъ числа цѣлыя, положимъ $\lambda=t^2-t_1.\ t_2$; тогда

$$a=(t^2+t_1^2)\,t_2;\ b=(t^2+t_2^2)\,t_1;\ c=(t_1+t_2)\,(t^2-t_1.\ t_2).$$

Эти выраженія, въ которыхъ t, t_1 и t_2 означаютъ произвольныя цѣлыя числа, представляютъ общее рѣшеніе вопроса: опредѣленіе площади треугольника въ цѣлыхъ числахъ.

Вставляя эти выраженія вмѣсто a, b и c, находимъ:

$$\triangle=t.\ t_1.\ t_2\,(t_1+t_2)\,(t^2-t_1\,t_2).$$

Принимая на пр. $t=6;\ t_1=3;\ t_2=9$, находимъ

$$a=15;\ b=13;\ c=14;\ \triangle=84;$$

принимая $t=10.\ t_1=4;\ t_2=5$, находимъ

$$a=29;\ b=25;\ c=36;\ \triangle=360;$$

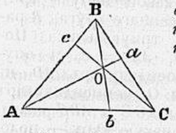
принимая $t=4;\ t_1=3;\ t_2=4$, находимъ

$$a=25;\ b=24,\ c=7;\ \triangle=84;$$ и т. д.

§ 158. **Теорема.** *Если чрезъ какую нибудь точку* O (черт. 210) *внутри треугольника* ABC *и чрезъ вершины трехъ угловъ его проведемъ прямыя* Aa, Bb *и* Cc *то будемъ имѣть слѣдующія соотношенія:* *)

$$\frac{Oa}{Aa}+\frac{Ob}{Bb}+\frac{Oc}{Cc}=1;\ \frac{OA}{Aa}+\frac{OB}{Bb}+\frac{OC}{Cc}=2;$$

$$\frac{OA.\ OB.\ OC}{Oa.\ Ob.\ Oc}=\frac{OA}{Oa}+\frac{OB}{Ob}+\frac{OC}{Oc}+2.$$



Черт. 210.

Доказ. 1) Такъ какъ, по § 141 слѣдствіе 4,

$$\frac{\triangle aOC}{\triangle AaC}=\frac{Oa}{Aa}=\frac{\triangle BOa}{\triangle ABa},\text{ то }\frac{\triangle aOC+\triangle BOa}{\triangle AaC+\triangle ABa}=\frac{Oa}{Aa}\text{ или}$$

$$\frac{\triangle BOC}{\triangle ABC}=\frac{Oa}{Aa};$$

подобнымъ образомъ находимъ:

$$\frac{\triangle AOC}{\triangle ABC}=\frac{Ob}{Bb};\ \frac{\triangle BOA}{\triangle ABC}=\frac{Oc}{Cc}.$$

Сложивъ предъидущія три уравненія, находимъ:

$$\frac{Oa}{Aa}+\frac{Ob}{Bb}+\frac{Oc}{Cc}=\frac{\triangle BOC+\triangle AOC+\triangle BOA}{\triangle ABC}=1$$

2) Замѣтивъ, что

$$\frac{Aa}{Aa}+\frac{Bb}{Bb}+\frac{Cc}{Cc}=3,$$

вычтемъ изъ этого тождественнаго уравненія предъидущее уравненіе; находимъ:

$$\frac{OA}{Aa}+\frac{OB}{Bb}+\frac{OC}{Cc}=2.$$

3) Если первое уравненіе представимъ въ видѣ:

---

*) Эйлеръ въ особомъ сочиненіи развилъ какъ эти три соотношенія такъ и аналогическія формулы для сферическаго треугольника, основываясь на послѣднемъ уравненіи, которое доказываетъ съ помощію тригонометріи.

$$\frac{Oa}{OA+Oa}+\frac{Ob}{OB+Ob}+\frac{Oc}{OC+Oc}=1,\text{ или}$$

$$\frac{1}{\frac{OA}{Oa}+1}+\frac{1}{\frac{OB}{Ob}+1}+\frac{1}{\frac{OC}{Oc}+1}=1,$$

и приведемъ къ общему знаменателю, то получимъ:

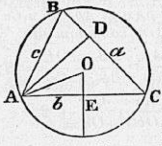
$$\left(\frac{OB}{Ob}+1\right)\left(\frac{OC}{Oc}+1\right)+\left(\frac{OA}{Oa}+1\right)\left(\frac{OC}{Oa}+1\right)+\left(\frac{OA}{Ob}+1\right)\left(\frac{OB}{Ob}+1\right)$$

$$=\left(\frac{OA}{Oa}+1\right)\left(\frac{OB}{Ob}+1\right)\left(\frac{OC}{Oc}+1\right).$$

Раскрывъ скобки и сократив, найдемъ:

$$\frac{OA\ OB.\ OC}{Oa.\ Ob.\ Oc}=\frac{OA}{Oa}+\frac{OB}{Ob}+\frac{OC}{Oc}+2.$$

§ 159. ЗАДАЧА. *По тремъ даннымъ сторонамъ треугольника опредѣлить радіусъ описаннаго около него круга.*



Черт. 211.

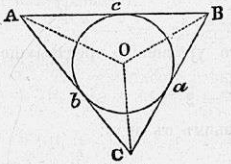
Рѣшеніе. Пусть будетъ ABC (черт. 211) какой нибудь треугольникъ, O центръ описаннаго круга, R радіусъ его и $\triangle$ площадь треугольника. Положимъ $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, и опустимъ изъ точки A перпендикуляръ AD на сторону BC и изъ точки O перпендикуляръ OE на сторону AC. Углы AOE и ABC равны, потому что имѣютъ одинакую мѣру — половину дуги AC; слѣдов. прямоугольные треугольники AOE и ABD подобны, и потому $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AO}$ или $\frac{AD}{c}=\frac{{}^1/_2 b}{R}$; слѣдоват. $AD=\frac{bc}{2R}$. Замѣтивъ, что $\triangle=\frac{a.\,AD}{2}$, находимъ $\triangle=\frac{abc}{4R}$ и отсюда:

$$R=\frac{abc}{4\triangle}.$$

Вставляя вмѣсто $\triangle$ выраженіе § 142, будетъ имѣть:

$$R=\frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)\ (b+c-a)\ \ (a+c-b)\ (a+b-c).}}$$

§ 160. ЗАДАЧА *По тремъ даннымъ сторонамъ треугольника опредѣлить радіусъ внутренняго вписаннаго круга.*



Черт. 212.

Рѣшен. Пусть будетъ ABC (чер. 212) какой нибудь треугольникъ, O центръ внутренняго вписаннаго круга, r радіусъ его и $\triangle$ площадь треугольника. Положимъ $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, и соединимъ точку O съ вершинами трехъ угловъ треугольника. Замѣтивъ, что

$$COB=\frac{a.\,r}{2};\ AOC=\frac{b.\,r}{2};\ AOB=\frac{c.\,r}{2},$$

находимъ:

$$COB+AOC+AOB=(a+b+c).\,\frac{r}{2},$$

или $\triangle=(a+b+c)\frac{r}{2}$; отсюда

$$r=\frac{2\triangle}{a+b+c}.$$

Вставляя вмѣсто $\triangle$ выраженіе § 142, получимъ:

$$r=\frac{\sqrt{(a+b+c)\ (b+c-a)\ (a+c-b)(a+b-c)}}{2\ (a+b+c)}.$$

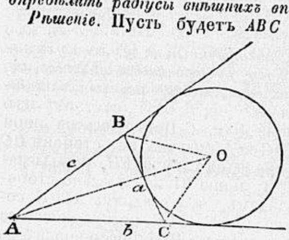
Помноживъ это выраженіе на выраженіе предъидущаго §, находимъ:

$$2rR=\frac{abc}{a+b+c};$$

раздѣливъ тѣже выраженія, находимъ:

$$\frac{2r}{R}=\frac{b+c-a}{a}.\ \frac{a+c-b}{b}.\ \frac{a+b-c}{c}.$$

§ 161. ЗАДАЧА. *По тремъ даннымъ сторонамъ треугольника опредѣлить радіусы внѣшнихъ вписанныхъ круговъ.*



Черт. 213.

Рѣшеніе. Пусть будетъ ABC (черт. 213) какой нибудь треугольникъ, O центръ однаго изъ внѣшнихъ вписанныхъ круговъ, ρ радіусъ его и $\triangle$ площадь треугольника. Положимъ $BC=a$; $AC=b$, $AB=c$, и соединимъ точку O съ вершинами угловъ треугольника. Такъ какъ

$$AOC=\frac{b\rho}{2};\ ABO=\frac{c\rho}{2};\ BOC=\frac{a\rho}{2},$$

и $AOC+ABO-BOC=\triangle$,

то $\triangle=(b+c-a)\,\frac{\rho}{2}$, и отсюда

$$\rho=\frac{2\triangle.}{b+c-a}.$$

Вставляя вмѣсто $\triangle$ выраженіе § 142, находимъ:

$$\rho=\frac{2\triangle}{b+c-a}=\sqrt{\frac{(a+b+c)\ (b+c-a)\ (a+c-b)\ (a+b-c)}{2\ (b+c-a)}}.$$

Если чрезъ ρ_1 и ρ_2 означимъ радіусы двухъ другихъ внѣшнихъ вписанныхъ круговъ, то

$$\rho_1=\frac{2\triangle}{a+c-b}=\sqrt{\frac{(a+b+c)\ (b+c-a)\ (a+c-b)\ (a+b-c)}{2\ (a+c-b}},$$

$$\rho_2=\frac{2\triangle}{a+b-c}=\sqrt{\frac{(a+b+c)\ (b+c-a)\ (a+c-b)(a+b-c)}{2\ (a+b-c)}}.$$

Сложивъ три уравненія

$$\frac{1}{\rho}=\frac{b+c-a}{2\triangle};\ \frac{1}{\rho_1}=\frac{a+c-b}{2\triangle},\ \frac{1}{\rho_2}=\frac{a+b-c}{2\triangle},$$

находимъ:

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{a+b+c}{2\triangle},$$

а такъ какъ $\frac{a+b+c}{2\triangle}=\frac{1}{r}$ (§ 160), то

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}.$$

Перемноживъ между собой уравненія:

$$r=\frac{2\triangle}{a+b+c};\ \rho=\frac{2\triangle}{b+c-a};\rho_1=\frac{2\triangle}{a+c-b};\rho_2=\frac{2\triangle}{a+b-c},$$

находимъ:

$$r.\rho.\rho_1\rho_2=\frac{16\triangle^4}{(a+b+c)\ (b+c-a)\ (a+c-b)\ (a+b-c)},$$

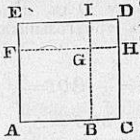
а такъ какъ (§ 142).

$$(a+b+c)\ (b+c-a\quad a+c-b\quad a+b-c=16\triangle^2,$$

то $r.\rho.\rho_1.\rho_2=\triangle^2$ и отсюда

$$\triangle=\sqrt{r.\rho.\rho_1.\rho_2}.$$

§ 162. Теорема. *Квадратъ, построенный на суммѣ двухъ линій, состоитъ изъ суммы квадратовъ, построенныхъ на этихъ линіяхъ и удвоеннаго прямоугольника, составленнаго изъ этихъ линій.*



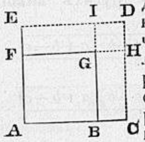
Черт. 214.

Доказ. Положимъ, что линія AC (черт. 214) состоитъ изъ суммы двухъ линій AB и AC. Построивъ на линіи AC квадратъ $AEDC$ и отложивъ на сторонѣ DC часть $DH=BC$, проведемъ линію FH, параллельно сторонѣ AC и линію BI параллельно сторонѣ AE; тогда найдемъ, что квадратъ $ACDE$ состоитъ: 1) изъ квадрата $AFGB$, построеннаго на линіи AB, 2) изъ квадрата $GIDH$, построеннаго на линіи DH, или на равной ей линіи BC, и 3) изъ двухъ равныхъ прямоугольниковъ $BCHG$ и $EFGI$, составленныхъ изъ линій AB и BC.

Эта теорема соотвѣтствуетъ алгебраическому предложенію:

$$a+b)^2=a^2+b^2+2ab.$$

§ 163. Теорема. *Квадратъ, построенный на разности двухъ линій, равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на этихъ линіяхъ, безъ удвоеннаго прямоугольника, составленнаго изъ этихъ линій.*



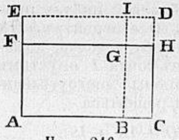
Черт. 215.

Доказ. Положимъ, что линія AB (черт. 215) есть разность двухъ линій AC и BC. Построивъ на линіи AC квадратъ $ACDE$ и отложивъ на сторонѣ DC часть $DH=BC$, проведемъ линію HF параллельно сторонѣ AC и линію BI параллельно сторонѣ AE; находимъ, что квадратъ $AFGB$, построенный на разности двухъ линіи AC и BC, равенъ: 1) квадрату $ACDE$, построенному на линіи AC, 2) безъ прямоугольника $BCDI$, составленнаго изъ линій AC и BC и безъ равнаго ему прямоугольника $EFHD$, и 3) сложенному съ квадратомъ $GHDI$, построеннымъ на линіи DH или на равной ей линіи BC.

Эта теорема соотвѣтствуетъ алгебраическому предложенію:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

§ 164. Теорема. *Прямоугольникъ, основаніе котораго есть сумма и высота разность двухъ данныхъ линій, равенъ разности квадратовъ, построенныхъ на этихъ линіяхъ.*

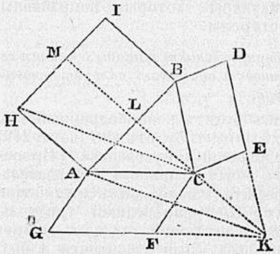


Черт. 216.

Доказ. Положимъ что AC (черт. 216) есть сумма двухъ линій AB и BC, а CH разность тѣхъ же линій, такъ что $AFHC$ будетъ прямоугольникъ, составленный изъ суммы и разности линій AB и BC. Отложивъ на продолженіи линіи CH часть $HD=BC$, проведемъ линію DE параллельно сторонѣ AC и линію BI параллельно сторонѣ AF. Такъ какъ, по построенію, $CD=AB$, то $AEIB$ есть квадратъ, построенный на сторонѣ AB, и потому прямоугольникъ $ACHF$ равенъ квадрату $ABIE$, безъ прямоугольника $EFGI$, сложенному съ прямоугольникомъ $BGHC$. Но разность двухъ прямоугольниковъ $EFGI$ и $BGHC$ есть квадратъ $GIDH$, построенный на линіи HD или на равной ей линіи BC, потому что разность линій FG и BG равняется линіи GH. Слѣдов. прямоугольникъ $ACHF$, составленный изъ суммы и разности двухъ линій AB и BC, равенъ квадрату $AEIB$, построенному на сторонѣ AB, безъ квадрата $GHDI$, построеннаго на сторонѣ BC.

Эта теорема соотвѣтствуетъ алгебраическому предложенію:

$$(a+b)\ (a-b)=a^2-b^2.$$



Черт. 217.

§ 165. Теорема. *Если на сторонахъ AC и CB треугольника ABC* (черт. 217) *построимъ какіе нибудь параллелограммы $ACFG$ и $BDEC$ и, продолживъ стороны DE и GF до пересѣченія ихъ въ точкѣ K, проведемъ линіи AH и BI параллельныя и равныя CK, то параллелограммъ $AHIB$ будетъ равенъ суммѣ параллелограммовъ $ACFG$ и $BDEC$.*

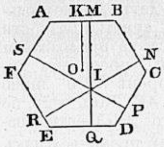
Доказ. Продолживъ линію KC до пересѣченія съ стороною HI въ точкѣ M и соединивъ точку H съ точкою C и точку A съ точкою K, замѣтимъ, что $AHCK$ есть параллелограммъ. Очевидно, что параллелограммы $AHML$ и $AHKC$ равновелики, потому что имѣютъ общее основаніе и одинакія высоты; а такъ какъ $AHCK=2\triangle ACH$ и $ACFG=2\triangle ACK$, то параллелограмъ $AHCK$ равновеликъ съ параллелограммомъ, $ACFG$, а потому параллелограммы $AHML$ и $ACFG$ равновелики.

Подобнымъ же образомъ доказывается, что параллелограммы $IBLM$ и $BDEC$ равновелики. Слѣдов. параллелограммъ $AHIB$ равняется суммѣ параллелограмовъ $ACFG$ и $BDEC$.

§ 166. Теорема. *Если изъ какой нибудь точки, лежащей внутри правильнаго многоугольника, опустимъ перпендикуляры на всѣ стороны его, то сумма этихъ перпендикуляровъ, дѣленная на число сторонъ многоугольника, т. е. средняя ариѳметическая изъ нихъ, равняется апоѳемѣ.*

Доказ. Пусть будетъ $ABCDEF$ (черт. 218) какой нибудь правильный многоугольникъ, O его центръ, OK его апоѳема и I какая нибудь точка, лежащая внутри его. Если изъ точки I опустимъ перпендикуляры на стороны многоугольника, то площадь его будетъ равняться

$$\frac{AB}{2}(IM + IN + IP + IQ + IR + IS).$$



Черт. 218.

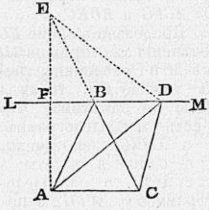
Если же означимъ чрезъ n число сторонъ многоугольника, то площадь его выразится чрезъ $\frac{n\,AB.\,OK}{2}$. Сравнивая эти два выраженія площади многоугольника и сокративъ на $\frac{AB}{2}$, находимъ

$$OK = \frac{IM + IN + IP + IQ + IR + IS}{n}.$$

Это предложеніе справедливо и тогда, когда изъ точки, лежащей внѣ многоугольника, опускаются перпендикуляры на стороны его; въ этомъ случаѣ нужно только брать съ отрицательнымъ знакомъ тѣ перпендикуляры, которые направлены извнѣ во внутрь какой нибудь стороны.

§ 167. Задача. *Опредѣлить триугольникъ, который изъ всѣхъ равновеликихъ съ нимъ триугольниковъ и одинакаго съ нимъ основанія имѣетъ наименьшій периметръ.*

Рѣшеніе. Искомый триугольникъ будетъ равнобедренный. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ ABC (черт. 219) равнобедренный триугольникъ. Проведя чрезъ точку B линію LM параллельно сторонѣ AC, вообразимъ другой триугольникъ ADC равновеликій триугольнику ABC и имѣющій съ нимъ общее основаніе AC. Если изъ точки A опустимъ перпендикуляръ на LM, продолжимъ сторону CB до пересѣченія съ этимъ перпендикуляромъ въ точкѣ E и наконецъ соединимъ точки E и D, то найдемъ, что прямоугольные триугольники ABF и EBF равны, потому что имѣютъ общій катетъ FB и кромѣ того $\angle FBA = \angle BAC = \angle BCA = \angle FBE$; слѣдов. $EB = AB$.



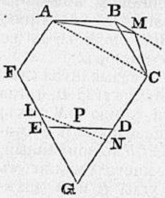
Черт. 219.

Подобнымъ же образомъ находимъ, что $ED = AD$. Но $ED + DC > EC$, а $EC = EB + BC = AB + BC$; слѣдов. $AD + DC > AB + BC$, т. е. периметръ равнобедреннаго триугольника меньше периметра всякаго триугольника, имѣющаго тоже основаніе и туже площадь.

§ 168. Задача. *Опредѣлить многоугольникъ, который изъ всѣхъ одноименныхъ и равновеликихъ съ нимъ многоугольниковъ имѣетъ наименьшій периметръ.*

Рѣшеніе. Искомый многоугольникъ будетъ правильный.

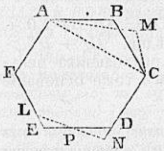
Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ $ABCDEF$ (черт. 220) искомый многоугольникъ, имѣющій изъ всѣхъ одноименныхъ и равновеликихъ съ нимъ многоугольниковъ наименьшій периметръ. Соединимъ точки A и C и проведемъ линію BM параллельно линіи AC. Если вообразимъ триугольникъ AMC, равновеликій триугольнику ABC, то периметръ триугольника ABC долженъ быть менѣе периметра триугольника AMC, иначе многоугольникъ $ABCDEF$ имѣлъ бы бо́льшій периметръ нежели одноименный и равновеликій съ нимъ многоугольникъ $AMCDEF$, что противно положенію; изъ этого, слѣдуетъ (§ 167), что ABC есть триугольникъ равнобедренный и $AB = BC$. Подобнымъ же образомъ доказывается равенство другихъ сторонъ многоугольника $ABCDEF$.



Черт. 220.

Углы многоугольника также равны. Въ самомъ дѣлѣ, если положимъ, что уголъ E меньше угла D, то, продолживъ стороны FE и CD до пересѣченія въ точкѣ G, найдемъ, что въ триугольникѣ EGD стороны GD и EG лежатъ противъ неравныхъ угловъ; слѣдов. $GD > EG$. Если сдѣлаемъ $GL = GD$ и $GN = GE$, и соединимъ точки L и N, то триугольники EGD и LGN, имѣющіе общій уголъ между сторонами соотвѣтственно равными, будутъ равны; вычтя изъ этихъ триугольниковъ по $GEPN$, находимъ, что триугольники LPE и DPN равновелики, а такъ какъ кромѣ того, по построенію, $LE = DN$ и вслѣдствіе равенства триугольниковъ DEG и NLG стороны ED и LN равны, то многоугольники $ABCDEF$ и $ABCNLF$ одноименны, равновелики и имѣютъ равные периметры, что противно положенію. Изъ этого слѣдуетъ, что углы E и D должны быть равны. Подобнымъ же образомъ доказывается равенство и другихъ угловъ многоугольника $ABCDEF$. И такъ искомый многоугольникъ будетъ правильный.

§ 169. Задача. *Опредѣлить многоугольникъ, который изъ всѣхъ одноименныхъ многоугольниковъ, одинакаго съ нимъ периметра имѣетъ наибольшую площадь.*



Черт. 221.

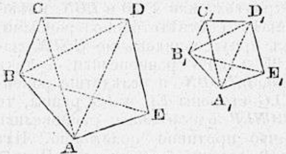
Рѣшеніе. Искомый многоугольникъ будетъ правильный. Въ самомъ дѣлѣ пусть будетъ *ABCDEF* (черт. 221) искомый многоугольникъ, имѣющій изъ всѣхъ одноименныхъ многоугольниковъ, одинакаго съ нимъ периметра, наибольшую площадь. Если положимъ, что стороны *AB* и *BC* не равны, то пусть будетъ *AMC* равнобедренный треугольникъ, котораго периметръ равенъ периметру треугольника *ABC.* По § 167 площадь треугольника *AMC* больше площади треугольника *ABC,* потому что равнобедренный треугольникъ, равновеликій треугольнику *ABC,* имѣлъ бы меньшій периметръ; слѣд. многоугольники *AMCDEF* и *ABCDEF* одноименны и имѣютъ одинакій периметръ, но первый больше втораго, что противно положенію. Изъ этого слѣдуетъ, что $AB = BC$. Подобнымъ же образомъ доказывается равенство и другихъ сторонъ.

Равенство угловъ многоугольника *ABCDEF* доказывается какъ въ предъидущемъ §. Положимъ, что уголъ *E* менѣе угла *D*, тогда можно, какъ въ предъидущемъ §, провести линію *LN* такъ, что бы треугольники *LPE* и *NPD* были равновелики и составить такимъ образомъ многоугольникъ *ABCNLF* одноименный, равновеликій и одинакаго периметра съ многоугольникомъ *ABCDEF*, что противно положенію; слѣдов. углы *E* и *D* должны быть равны. Подобнымъ же образомъ обнаруживается равенство и другихъ угловъ. И такъ искомый многоугольникъ будетъ правильный.

Съемка плана.

§ 170. Снимать планъ какой нибудь мѣстности, значитъ изобразить на бумагѣ въ уменьшенномъ видѣ фигуру подобную той, которую представляетъ эта мѣстность. Съемка плана производится или съ помощію *Астролябіи,* или спомощію *Мензулы.*

1. Положимъ, что требуется снять планъ съ мѣстности, имѣющей видъ многоугольника *ABCDE* (черт. 222).



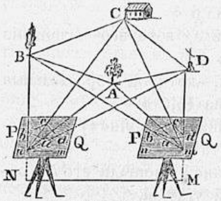
Черт. 222.

Измѣривъ линіи *AB*, *BC*, *CD*, *DE* и *EA* и опредѣливъ, съ помощію Астролябіи, углы *A*, *B*, *C*, *D* и *E*, проведемъ на бумагѣ линію A_1 B_1, составляющую опредѣленную часть линіи *AB*, на пр. такую часть, чтобы линія A_1 B_1 содержала столько же дюймовъ, сколько линія *AB* содержитъ саженей; это отношеніе двухъ линій *AB* и A_1B_1 составляетъ такъ называемый *масштабъ* плана. Въ точкѣ B_1 строится уголъ равный углу *B* и откадывается линія B_1C_1 пропорціональная по масштабу линіи *BC.* Продолжая это построеніе такимъ образомъ далѣе, составимъ многоугольникъ $A_1B_1C_1D_1E_1$, подобный многоугольнику *ABCDE.*

Котда по какимъ либо причинамъ нельзя измѣрить всѣ стороны многоугольника *ABCDE*, то можно ограничиться опредѣленіемъ одной изъ нихъ, на пр. стороны *AB*. Измѣривъ за тѣмъ съ помощію Астролябіи углы *BAC*, *BAD*, *BAE*, также углы *ABC*, *ABD* и *ABE*, проведемъ на бумагѣ линію A_1B_1, составляющую опредѣленную часть линіи *AB* и построимъ, съ помощію транспортира, углы $B_1A_1C_1$, $B_1A_1D_1$, ${}_1BA_1E_1$, соотвѣтственно равные угламъ *BAC*, *BAD* и *BAE*; также углы $A_1B_1C_1$, $A_1B_1D_1$ и $A_1B_1E_1$ соотвѣтсвенно равные угламъ *ABC*, *ABD* и *ABE*; пересѣченія линій A_1C_1 и B_1C_1, A_1D_1 и B_1D_1, A_1E_1 и B_1E_1 опредѣлятъ вершины C_1, D_1 и E_1 многоугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$, подобнаго многоугольнику *ABCDE.*

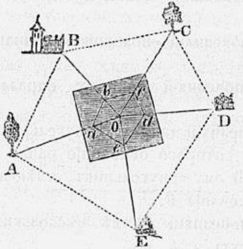
2. *Мензула,* употребляемая для съемки плана, состоитъ изъ деревянной доски, поддерживаемой тремя ножками и снабженной алидадою; на этой доскѣ натягивается чистый листъ бумаги.

Чтобы снять съ помощію мензулы планъ какой нибудь мѣстности, представляющей фигуру *ABCD* (черт. 223), назначаемъ на поверхности земли какую нибудь прямую линію *MN*, возможно точнѣе опредѣленную; эта прямая называется *базисомъ.* Проведя на мензулѣ *PQ* прямую *mn*, составляющую опредѣленную часть базиса *MN*, устанавливаемъ мензулу такъ, чтобы точка *m* приходилась прямо надъ точкою *M* и линія *mn* была направлена по линіи *MN*; проводимъ за тѣмъ съ помощію алидады на мензулѣ изъ точки *m* прямыя, направленныя ко всѣмъ вершинамъ *A*, *B*, *C* и *D* фигуры *ABCD.* Перенеся потомъ мензулу въ точку *N*, устанавливаемъ ее такъ, чтобы точка *n* прямо приходилась надъ точкою *N* и линія *nm* была направлена по линіи *NM*, и проводимъ за тѣмъ съ помощію алидады на мензулѣ изъ точки *n* прямыя, направленныя ко всѣмъ вершинамъ *A*, *B*, *C* и *D*; пересѣченія этихъ линій съ первыми опредѣлятъ на м ензулѣ фигуру *abcd* подобную фигурѣ *ABCD.*



Черт. 223.

Если внутри мѣстности *ABCDE* (черч. 224), съ которой нужно снять планъ, находится точка *O*, разстоянія которой отъ вершинъ *A*,*B*,*C*,*D* и *E* или извѣстны или легко могутъ быть опредѣлены, то для съемки плана устанавливаютъ мензулу въ точкѣ *O* и, проведя на ней съ помощію алидады изъ точки *O* прямыя ко всѣмъ вершинамъ *A*,*B*,*C*,*D* и *E*, откладываютъ на этихъ линіяхъ части *Oa*, *Ob*, *Oc*, *Od* и *Oe* соотвѣтственно пропорціональныя разстояніямъ *OA*,*OB*,*OC*,*OD*и*OE*; тогда на мензулѣ получится фиг. *abcde* подобная фигурѣ *ABCDE.*



Черт. 224.

Когда нужно опредѣлить величину площади какой нибудь мѣстности, то, снявши планъ ея, разбиваемъ его на треугольники и опредѣляемъ площадь каждаго треугольника отдѣльно. За тѣмъ, сложивши всѣ площади треугольниковъ, находимъ въ суммѣ площадь разсматриваемой мѣстности, выраженную въ квадратныхъ единицахъ масштаба. Положимъ, на пр., что по принятому масштабу каждая сажень представляется однимъ дюймомъ, и что въ планѣ какой нибудь мѣстности оказалось 1000 квадр. дюймовъ, тогда площадь этой мѣстности содержитъ 1000 квадр. саженъ.

Задачи.

161. Опредѣлить геометрическое мѣсто вершинъ равновеликихъ треугольниковъ, имѣющихъ общее основаніе.

162. Опредѣлить площадь параллелограмма, котораго основаніе равно 212, 14 ф. а высота равна 85,6 ф.

163. Опредѣлить площадь треугольника, котораго основаніе равно 324,5 ф. а высота равна 85,6 ф.

164. Опредѣлить площадь трапеціи, которой параллельныя стороны равны 24,5 ф. а высота равна 15,3 ф.

165. Опредѣлить площадь треугольника по данному периметру его p и радіусу r вписаннаго круга.

166. Построить треугольникъ по данной площади его k^2, одной сторонѣ a и противуположному ей углу m.

167. Провести между сторонами угла линію данной величины, которая отсѣкала бы отъ угла треугольникъ, равновеликій данному квадрату.

168. Раздѣлить параллелограммъ $ABCD$ на двѣ части въ отношеніи m: n линіею, параллельною данной прямой MN.

169. Построить квадратъ равновеликій двойному данному квадрату.

170. Построить квадратъ равновеликій половинѣ даннаго квадрата.

171. Построить квадратъ равновеликій данному параллелограмму.

172. Построить квадратъ равновеликій данному треугольнику.

173. Превратить треугольникъ, котораго основаніе равно b а высота равна h, въ равновеликій ему треугольникъ, имѣющій данную высоту H или данное основаніе B.

174. Построить квадратъ равновеликій суммѣ нѣсколькихъ квадратовъ, которыхъ стороны суть a, b, c...

175. Построить квадратъ равновеликій разности двухъ квадратовъ, которыхъ стороны суть a и b.

176. Опредѣлить построеніемъ квадратный корень изъ 154.

177. На линіи LM найти такую точку, чтобы разность квадратовъ разстояній этой точки отъ двухъ данныхъ точекъ A и B равнялась данному квадрату k^2.

178. Опредѣлить такія двѣ линіи, чтобы сумма ихъ квадратовъ равнялась данному квадрату k^2 и прямоугольникъ, изъ нихъ составленный, былъ бы равновеликъ прямоугольнику, котораго основаніе есть b а высота h.

179. Построить квадратъ равновеликій $\frac{3}{5}$ даннаго квадрата.

180. Раздѣлить треугольникъ на m равныхъ частей линіями, проведенными изъ вершины его.

181. Построить квадратъ равновеликій данному многоугольнику.

182. Даны два подобныхъ многоугольника,—опредѣлить третій многоугольникъ имъ подобный и равновеликій ихъ суммѣ.

183. Построить многоугольникъ подобный данному многоугольнику и относящійся къ нему какъ m: n.

184. Даны два многоугольника,— построить третій многоугольникъ подобный одному и равновеликій другому.

185. Найти двѣ линіи, которыхъ отношеніе равнялось бы отношенію двухъ данныхъ квадратовъ.

186. Стороны треугольника соотвѣтственно равны 5 ф., 9 ф. и 10 ф.; опредѣлить площадь его.

187. Опредѣлить площадь трапеціи по даннымъ четыремъ сторонамъ ея a, b, c и d, предполагая, что a и b суть ея параллельныя стороны.

188. Раздѣлить треугольникъ ABC пополамъ линіею, перпендикулярной къ одной изъ сторонъ его.

189. Раздѣлить треугольникъ ABC пополамъ линіею, проходящею чрезъ точку O, лежащую на сторонѣ AC.

190. Внутри треугольника ABC найти такую точку, чтобы прямыя, проведенныя отъ этой точки къ тремъ вершинамъ A, B и C, раздѣлили треугольникъ на три равновеликихъ треугольника.

191. Внутри треугольника ABC найти такую точку, чтобы линіи, проведенныя отъ этой точки къ тремъ вершинамъ A, B и-

C, раздѣлили треугольникъ на три треугольника, которыхъ площади относились бы какъ $m : n : r$.

192. Раздѣлить треугольникъ пополамъ линіею параллельною основанію его.

193. На линіи a построить прямоугольникъ равновеликій данному прямоугольнику, котораго основаніе есть b а высота h.

194. По данному периметру $2p$ построить прямоугольникъ, равновеликій данному квадрату k^2.

195. По данному периметру $2p$ построить прямоугольникъ равновеликій данному прямоугольнику.

196. Данную линію p раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы прямоугольникъ, составленный изъ всей линіи и одной части ея, былъ равновеликъ данному квадрату k^2.

197. По данной разности d между основаніемъ и высотою построить прямоугольникъ равновеликій данному квадрату k^2.

198. По данной гипотенузѣ a построить прямоугольный треугольникъ равновеликій данному квадрату k^2.

199. Провести чрезъ внѣшнюю точку A сѣкущую къ кругу такъ, чтобы сумма квадратовъ внутренней и внѣшней части ея равнялась данному квадрату k^2.

200. Построить треугольникъ по тремъ даннымъ высотамъ его h, h_1 и h_2.

201. Въ треугольникѣ, котораго основаніе есть b а высота h, вписать прямоугольникъ равновеликій данному квадрату.

202. Опредѣлить площадь правильнаго двѣнадцатиугольника вписаннаго въ кругъ радіуса r.

203. По данной сторонѣ правильнаго треугольника, пятиугольника, шестиугольника, десятиугольника, двѣнадцатиугольника, опредѣлить площади этихъ многоугольниковъ.

204. По данной площади k^2 вписаннаго квадрата и правильнаго вписаннаго шестиугольника, опредѣлить площадь описаннаго квадрата и описаннаго шестиугольника.

205. Провести чрезъ точку D, лежащую внутри угла ABC, прямую, которая отсѣкала бы отъ угла треугольникъ, равновеликій данному параллелограмму.

ГЛАВА VIII.

Опредѣленіе окружности и площади круга.

О предѣлахъ. Опредѣленіе окружности и площади круга. Квадратура круга. Гипократова луночка. Опредѣленіе площади криволинейныхъ фигуръ. Задачи.

О предѣлахъ.

§ 171 Опредѣленіе окружности и площади круга, равно какъ вычисленіе длины и площади какой нибудь кривой линіи, основывается на особомъ способѣ, который называется *способомъ предѣловъ*.

Есть два рода величинъ: величины *перемѣнныя* и величины *постоянныя*. Когда величина измѣняется, увеличиваясь или уменьшаясь, она называется *перемѣнною*; когда же она сохраняетъ одно и тоже значеніе — *постоянною*. Напр. діаметръ въ данномъ кругѣ есть величина постоянная, потому что всякій діаметръ, какое бы ни имѣлъ онъ положеніе, имѣетъ всегда одну и туже величину; напротивъ того, хорда есть величина перемѣнная, потому что съ перемѣной ея положенія измѣняется и величина ея; произведеніе же отрѣзковъ хордъ, проходящихъ чрезъ одну и туже точку внутри круга, будетъ величиною постоянною, потому что произведеніе это одинаково для всѣхъ хордъ, проходящихъ чрезъ эту точку. Подобнымъ образомъ углы какого нибудь треугольника суть величины перемѣнныя, потому что съ измѣненіемъ вида треугольника измѣняются и углы его; но сумма всѣхъ трехъ угловъ треугольника есть величина постоянная, потому что, какого бы вида не былъ треугольникъ, сумма эта остается неизмѣнной.

Когда перемѣнная величина, измѣняясь, приближается безпредѣльно къ постоянной величинѣ, такъ что разность между ними можетъ быть сдѣлана какъ угодно малой, то постоянная величина называется *предѣломъ* перемѣнной. Напр. сѣкущая, по мѣрѣ сближенія между собою двухъ точекъ пересѣченія, приближается безпредѣльно къ касательной; по этому касательная есть предѣлъ сѣкущей, когда точки пересѣченія ея сближаются. Равнымъ образомъ дробь 0,9999.... безпредѣльно приближается къ 1, по мѣрѣ увеличенія числа десятичныхъ знаковъ, и по этому 1 есть предѣлъ дроби 0,9999....

Одно приближеніе перемѣнной величины къ постоянной не достаточно для того, чтобы принять постоянную величину за предѣлъ перемѣнной; необходимо для этого удостовѣриться, что сближеніе происходитъ неограниченно, т. е., что разность между перемѣнной и постоянной величиною можетъ быть сдѣлана менѣе всякой величины. Напр. дробь 0,9888...., по мѣрѣ увеличенія числа знаковъ, приближается также къ 1; но тѣмъ неменѣе 1 не есть предѣлъ ея, потому что разность между ними остается всегда больше $\frac{1}{90}$; величина, къ которой дробь 0,9888.... безпредѣльно приближается есть $\frac{89}{90}$, и потому эта дробь есть предѣлъ дроби 0,9888....

Перемѣнная величина, которая имѣетъ предѣломъ нуль и неограниченно приближается къ нему, называется *величиною безконечно малою*. Напр. разстояніе двухъ точекъ пересѣченія сѣкущей, когда она приближается къ касательной, есть величина безконечно малая; равнымъ образомъ разность 1—0,999... есть величина безконечно малая.

Если чрезъ a означимъ предѣлъ какой нибудь перемѣнной величины и чрезъ x разность между ними, то перемѣнную величину можно представить въ видѣ $a+x$. Очевидно, что x, означая разность между перемѣнной величиною и ея предѣломъ, есть величина уменьшающаяся и безпредѣльно приближающаяся къ нулю; слѣдов. x есть величина безконечно малая.

X § 172. ТЕОРЕМА. *Если двѣ перемѣнныя величины при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ равны между собою, то равны и предѣлы ихъ.*

Пусть будутъ $a+x$ и $b+y$ двѣ перемѣнныя величины, которыхъ предѣлы суть a и b: положимъ, что $a+x=b+y$; требуется доказать, что $a=b$.

Доказ. Замѣтимъ, что a не можетъ быть меньше b. Въ самомъ дѣлѣ, если $a<b$, то, означивъ разность $b-a$ чрезъ d и представивъ уравненіе $a+x=b+y$ въ видѣ $x-y=b-a$, найдемъ $x-y=d$; вслѣдствіе этого разность между x и y должна оставаться постоянно равной конечной величинѣ d, слѣдов. x и y не могли бы безпредѣльно уменьшаться, а это противно предпологаемому свойству величинъ x и y.

Къ подобному же противорѣчію приводитъ предположеніе $a>b$. И такъ a должно равняться b.

X § 173. ТЕОРЕМА. *Если двѣ перемѣнныя величины, при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ сохраняютъ между собою одно и тоже отношеніе, то въ томъ же отношеніе будутъ и предѣлы ихъ.*

Пусть будутъ $a+x$ и $b+y$ двѣ перемѣнныя величины, которыхъ предѣлы суть a и b: положимъ, что отношеніе $\frac{a+x}{b+y}$ есть постоянная величина; требуется доказать, что $\frac{a+x}{b+y}=\frac{a}{b}$.

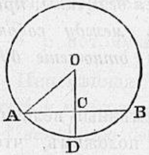
Доказ. Положимъ $\frac{a+x}{b+y}=\frac{m}{n}$, разумѣя подъ m и n какія нибудь постоянныя количества, тогда

$$an+nx=bm+my.$$

Такъ какъ $an+nx$ есть перемѣнная величина, которой предѣлъ равенъ an, а $bm+my$ — перемѣнная величина, которой предѣлъ равенъ bm, то изъ равенства перемѣнныхъ величинъ, по предъидущему §, слѣдуетъ $an=bm$, или $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$. Сравнивая эту пропорцію съ пропорціею $\frac{a+x}{b+y}=\frac{m}{n}$, находимъ $\frac{a+x}{b+y}=\frac{a}{b}$.

✗ § 174. Теорема. ***Площадь круга есть предѣлъ площадей правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ, когда число сторонъ ихъ неограниченно увеличивается.***

Доказ. Очевидно, что площадь круга больше площади вписаннаго и меньше площади описаннаго многоугольника, потому что площадь вписаннаго многоугольника есть часть площади круга, а площадь круга — часть площади описаннаго многоугольника. Но разность между площадями вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ безпредѣльно уменьшается при увеличеніи числа сторонъ и можетъ быть сдѣлана менѣе всякой величины.



Черт. 225.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ AB (черт. 225) сторона правильнаго вписаннаго многоугольника и OD радіусъ перпендикулярный къ ней. Такъ какъ $CD=OD-OC=AO-OC$, и $AO-OC<AC$, то $CD<AC$, т. е. ***разность радіуса и апоѳемы менѣе половины стороны многоугольника.*** При послѣдовательномъ удвоеніи числа сторонъ центральные углы постепенно уменьшаются и могутъ быть сдѣланы произвольно малыми, слѣдоват. и стороны многоугольника безпредѣльно уменьшаются и могутъ быть сдѣланы менѣе всякой величины, а такъ какъ, по доказанному, разность радіуса и апоѳемы менѣе половины стороны, то изъ этого слѣдуетъ, что эта разность, при послѣдовательномъ удвоеніи числа сторонъ многоугольника, безпредѣльно уменьшается. Если же означимъ чрезъ u площадь правильнаго вписаннаго и чрезъ U площадь одноименнаго описаннаго мног—ка, чрезъ r радіусъ круга и чрезъ a апоѳему, то (§ 150 слѣдс. 2) $\frac{u}{U}=\frac{a^2}{r^2}$ или, вычтя обѣ части этого уравненія изъ единицы:

$$\frac{U-u}{U}=\frac{r^2-a^2}{r^2}.$$

Такъ какъ при послѣдовательномъ увеличеніи числа сторонъ многоугольниковъ, по доказанному, a неопредѣленно приближается къ r, то изъ этого уравненія слѣдуетъ, что разность $U-u$ безпредѣльно уменьшается и можетъ быть сдѣлана менѣе всякой величины. Отсюда мы заключаемъ, что чрезъ послѣдовательное увеличеніе числа сторонъ, разность между площадями круга и вписаннаго многоугольника, равно какъ и разность между площадями описаннаго многоугольника и круга, можетъ быть сдѣлана менѣе всякой величины и потому площадь круга есть предѣлъ площадей правильнаго вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ, когда число сторонъ ихъ безпредѣльно увеличивается.

Предложеніе это выражается иногда и такъ: ***кругъ есть правильный многоугольникъ съ безконечнымъ числомъ сторонъ.***

✗ § 175. Теорема. ***Окружность есть предѣлъ периметровъ правильнаго вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ, когда число сторонъ ихъ неограниченно увеличивается.***

Доказ. Изъ предъидущаго § слѣдуетъ, что при постепенномъ увеличеніи числа сторонъ, вписанные и описанные многоугольники приближаются къ совпаденію съ кругомъ; слѣдов. и периметры ихъ приближаются къ совпаденію съ окружностью круга.

Но при удвоеніи числа сторонъ периметръ вписаннаго многоугольника увеличивается (§ 131), а периметръ описаннаго уменьшается (§ 132); слѣдов. периметръ описаннаго многоугольника приближается къ совпаденію съ окружностью уменьшаясь, а периметръ вписаннаго приближается къ совпаденію съ окружностью увеличиваясь. Изъ этого слѣдуетъ, что окружность круга больше периметра вписаннаго и меньше периметра описаннаго многоугольника.

При постепенномъ же удвоеніи числа сторонъ разность между периметрами вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ неограниченно уменьшается и можетъ быть сдѣлано менѣе всякой величины. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ P периметръ описаннаго и p периметръ одноименнаго вписаннаго многоугольниковъ, r радіусъ круга и a апоѳема, тогда (§ 129)

$$\frac{p}{P}=\frac{a}{r} \text{ или } \frac{P-p}{P}=\frac{r-a}{r}.$$

Такъ какъ, при постепенномъ увеличеніи числа сторонъ, разность $r-a$, по предъидущему §, безпредѣльно уменьшается, то изъ этого уравненія слѣдуетъ, что и $P-p$ можетъ быть сдѣлано менѣе всякой величины. Отсюда заключаемъ, что чрезъ постепенное увеличеніе числа сторонъ, разность между окружностью и периметромъ вписаннаго многоугольника, равно какъ и разность между периметромъ описаннаго многоугольника и окружностью, можетъ быть сдѣлана меньше всякой величины, и потому окружность есть предѣлъ периметровъ правильныхъ описанныхъ и вписанныхъ многоугольниковъ, когда число сторонъ ихъ неограниченно увеличивается.

Опредѣленіе окружности и площади круга.

§ 176. **Теорема.** *Окружности круговъ относятся какъ радіусы или діаметры ихъ.*

Вообразимъ два круга, радіусы которыхъ пусть будутъ r и R, а длины окружностей C и c; требуется доказать, что $\frac{C}{c}=\frac{R}{r}=\frac{2R}{2r}$.

Доказ. Положимъ, что въ этихъ кругахъ вписаны два правильныхъ одноименныхъ многоугольника; означивъ периметры ихъ чрезъ P и p, находимъ (§ 129)

$$\frac{P}{p}=\frac{R}{r};$$

но такъ какъ окружность есть предѣлъ вписанныхъ многоугольниковъ, то (§ 175).

$$\frac{C}{c}=\frac{R}{r}=\frac{2R}{2r}.$$

Представивъ эту пропорцію въ видѣ

$$\frac{C}{2R}=\frac{c}{2r},$$

заключаемъ, что отношеніе окружности къ діаметру есть *число постоянное*, одинакое для всѣхъ круговъ.

Это поствянное число условились изобразить греческою буквою π, такъ что

$$\frac{C}{2R}=\pi.$$

Число π есть число ирраціональное, и потому не можетъ быть опредѣлено съ точностію; приближенная величина его есть: 3,14159.... (см. § 179).

§ 177. **Теорема.** *Длина окружности равняется радіусу умноженному на 2π.*

Пусть будутъ C длина окружности и R ея радіусъ; требуется доказать, что $C = 2\pi R$.

Доказ. Изъ уравненія предъидущаго §: $\frac{C}{2R} = \pi$, находимъ $C = 2\pi R$, что и требовалось доказать.

Съ помощію этого уравненія опредѣляется длина окружности, когда радіусъ ея извѣстенъ, при чемъ длина окружности будетъ выражена въ тѣхъ же линейныхъ единицахъ, въ которыхъ выражается радіусъ.

Опредѣленіе длины окружности въ линейныхъ единицахъ называется *выпрямленіемъ* окружности.

Если въ уравненіи $C = 2\pi R$ примемъ $R = 1$, то $C = 2\pi$; это значитъ, что 2π *есть длина окружности, которой радіусъ равенъ 1.*

Изъ уравненія $C = 2\pi R$ находимъ $R = \frac{C}{2\pi}$. Съ помощію этого выраженія можно опредѣлить радіусъ круга, когда извѣстна длина окружности.

§ 178. ЗАДАЧА. *Опредѣлить длину дуги, содержащей n градусовъ.*

Рѣшеніе. Пусть будетъ s длина дуги, содержащей n^0, и R радіусъ круга. Такъ какъ длина всей окружности равна $2\pi R$, то длина каждаго градуса ея будетъ $\frac{2\pi R}{360}$, и потому

$$s = \frac{2\pi R.\, n}{360}.$$

Длина дуги, опредѣленной съ помощію этого уравненія, будетъ выражена въ тѣхъ же линейныхъ единицахъ, въ которыхъ выражается радіусъ R. Опредѣленіе дуги въ линейныхъ единицахъ называется *выпрямленіемъ* ея.

Изъ предъидущаго уравненія находимъ:

$$n = \frac{360.\, s}{2\pi R};$$

съ помощію этого выраженія можно опредѣлить число градусовъ, содержащихся въ дугѣ данной длины и даннаго радіуса.

Если изъ вершины угла, содержащаго n^0, опишемъ радіусами R и r дуги и означимъ длины этихъ дугъ чрезъ S и s, то, по предъидущему, $S = \frac{2\pi R.\, n}{360}$ и $s = \frac{2\pi r.\, n}{360}$, слѣдов. $\frac{S}{s} = \frac{R}{r}$, т. е. *дуги, соотвѣтствующія одному и тому же центральному углу, относятся между собою какъ ихъ радіусы.*

§ 179. ЗАДАЧА. *Опредѣлить отношеніе окружности къ діаметру, т. е. число π.*

Рѣшеніе Въ § 177 мы нашли, что 2π есть длина окружности, которой радіусъ равенъ 1, и потому опредѣленіе π приводится къ опредѣленію окружности, которой радіусъ есть 1.

Для приближеннаго вычисленія такой окружности, означимъ чрезъ $a_6, a_{12}, a_{24}\dots$ стороны правильныхъ вписанныхъ многоугольниковъ о 6, 12, 24... сторонахъ, а чрезъ $b_6, b_{12}, b_{24}\dots$ стороны соотвѣтственныхъ описанныхъ многоугольниковъ, и вычислимъ периметры этихъ многоугольниковъ.

Такъ какъ радіусъ круга равенъ 1, то (§ 135) $a_6 = 1$, и периметръ вписаннаго шестиугольника равенъ поэтому 6. Далѣе, по § 124:

$$a_{12} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_6^2}{4}}} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}}}$$

$$= \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0{,}517638\dots,$$

слѣдов. периметръ вписаннаго двѣнадцатиугольника равенъ 6,211657..

Такимъ же образомъ находимъ

$$a_{24} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4}}} = 0,261052\ldots,$$

$$a_{48} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_{24}^2}{4}}} = 0,130806\ldots,$$

$$a_{96} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_{48}^2}{4}}} = 0,065438\ldots$$

и т. д.

Соотвѣтствующіе периметры будутъ:

6,265257...; 6,278700...; 6,282064... и т. д.

Затѣмъ вычислимъ, по формулѣ § 130, стороны $b_6\ b_{12}\ b_{24}\ldots$ описанныхъ многоугольниковъ; находимъ:

$$b_6 = \frac{a_6}{\sqrt{1 - \frac{a_6^2}{4}}} = 1,154700\ldots,$$

$$b_{12} = \frac{a_{12}}{\sqrt{1 - \frac{a_{12}^2}{4}}} = 0,535898\ldots,$$

$$b_{24} = \frac{a_{24}}{\sqrt{1 - \frac{a_{24}^2}{4}}} = 0,263294\ldots,$$

$$b_{48} = \frac{a_{48}}{\sqrt{1 - \frac{a_{48}^2}{4}}} = 0,131087\ldots,$$

$$b_{96} = \frac{a_{96}}{\sqrt{1 - \frac{a_{96}^2}{4}}} = 0,065472\ldots$$

и т. д.

Соотвѣтствующіе периметры будутъ:
6,928200; 6,630776; 6,319056; 6,292176; 6,285430; и т. д.

Для большей наглядности помѣщаемъ результаты вычисленій въ слѣдующей таблицѣ:

Число сторонъ многоугольника.	Периметръ вписаннаго многоугольника.	Периметръ описаннаго многоугольника.
6	6,000000	6,928200
12	6,211657	6,630776
24	6,265257	6,319056
48	6,278700	6,292176
96	6,282064	6,285429
192	6,282905	6,283746
384	6,283115	6,283326
768	6,283168	6,283220
1536	6,283 81	6,283194
3072	6,283184	6,283187

Изъ этой таблицы видно, что разность периметровъ описанныхъ и вписанныхъ многоугольниковъ постепенно уменьшается по мѣрѣ увеличенія числа сторонъ, и что разность периметровъ многоугольниковъ о 3072 сторонахъ уже менѣе 0,00001; слѣдов. и разность между этими многоугольниками и окружностью круга будетъ меньше 0,00001; а такъ какъ окружность разсматриваемаго круга выражается чрезъ 2π, то

$$2\pi = 6,28318 \text{ или } \pi = 3,14159,$$

съ точностью 0,00001.

Греческій Геометръ Архимедъ, ограничиваясь вычисленіемъ периметра многоугольника о 96 сторонахъ, нашелъ для π отношеніе $\frac{22}{7} = 3,1428$, вѣрное до 0,01. Это отношеніе, во многихъ приложеніяхъ, имѣетъ достаточную точность.

Адріанъ Меціи, жившій въ концѣ 16 столѣтія, нашелъ:

$$\pi = \frac{355}{113} = 3,1415920,$$

вѣрное до 0,000001. Отношеніе это, отличаясь значительной степенью приближенія, представляетъ, кромѣ того, ту выгоду, что легко удерживается въ памяти, особенно если представить его въ видѣ $\frac{1}{\pi} = 113:355$.*)

§ 180. **Теорема.** *Площадь круга равна квадрату радіуса, умноженному на* π.

Пусть будетъ R радіусъ круга и K его площадь; требуется доказать, что $K = \pi R^2$.

Доказ. Означимъ чрезъ C окружность круга и чрезъ M и P площадь и периметръ какого нибудь правильнаго описаннаго многоугольника. Если α есть разность между площадями описаннаго многоугольника и круга, такъ что $M - K = \alpha$, и β — разность между периметромъ и окружностью, такъ что $P - C = \beta$, то α и β, при постепенномъ увеличеніи числа сторонъ многоугольника, будутъ безпредѣльно уменьшаться; но, по § 144, $M = \frac{Pr}{2}$, а такъ какъ $M = K + \alpha$ и $P = C + \beta$, то

$$K + \alpha = \frac{R}{2}(C + \beta) = \frac{RC}{2} + \frac{R\beta}{2}.$$

(*) Только около конца 16-го столѣтія число π было опредѣлено съ такою точностью, которая не только удовлетворяла всѣмъ требованіямъ практики, но и далеко превышала ихъ. Францъ Віета вычислилъ π съ 10 десятичными знаками, съ помощію многоугольниковъ о 393216 сторонахъ, за тѣмъ Адріанъ Роменъ, опредѣлилъ π съ 15 десятичными знаками изъ многоугольниковъ о 251658240 сторонахъ; наконецъ Лудольфъ изъ Кельна опредѣлилъ сперва π съ 20 десятичными знаками изъ многоугольниковъ о 32212254720 сторонахъ, потомъ даже съ 35 десятичными знаками. Величина, полученная имъ для π есть:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288.$$

По желанію Лудольфа число это поставлено на его надгробномъ памятникѣ; потому оно и называется *Лудольфовымъ числомъ*.

Шенксъ (Shanks) вычислилъ π съ 530 десятичными знаками.

Въ этомъ уравненіи $K + \alpha$ и $\frac{RC}{2} + \frac{R\beta}{2}$ означаютъ двѣ перемѣнныя величины; постоянныя же части K и $\frac{RC}{2}$ будутъ предѣлы ихъ; слѣдов. (§ 172)

$$K = \frac{CR}{2},$$

т. е. *площадь круга равняется окружности, умноженной на половину радіуса.*

Это выраженіе площади круга можно получить впрочемъ прямо, разсматривая кругъ как правильный многоугольникъ съ безконечнымъ числомъ сторонъ.

Замѣтивъ, что $C = 2\pi R$ (§ 177), находимъ $K = \pi R^2$, что и требовалось доказать.

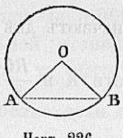
Съ помощію этого уравненія опредѣляется площадь круга, когда радіусъ его извѣстенъ, при чемъ площадь круга будетъ выражена въ такихъ квадратныхъ единицахъ, въ какихъ линейныхъ единицахъ выражается радіусъ R.

Изъ уравненія $K = \pi R^2$, находимъ $R = \sqrt{\frac{K}{\pi}}$; съ помощію этого выраженія можно опредѣлить радіусъ круга, когда извѣстна площадь его.

Изъ уравненія $K = \pi R^2$ слѣдуетъ, что площади круговъ относятся какъ квадраты ихъ радіусовъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ K и K_1 площади двухъ круговъ, R и R_1 ихъ радіусы, тогда $K = \pi R^2$ и $K_1 = \pi R_1{}^2$, слѣдов.

$$\frac{K}{K_1} = \frac{R^2}{R_1{}^2}$$

§ 181. **Теорема.** *Площадь сектора равняется выпрямленной дугѣ его, умноженной на половину радіуса.*



Черт. 226.

Пусть будетъ S площадь сектора AOB (черт. 226), R радіусъ круга и s длина дуги AB; требуется доказать, что

$$S = s\,\frac{R}{2}.$$

Доказ. Замѣтивъ, что площадь круга относится къ площади сектора какъ окружность круга къ дугѣ сектора, находимъ πR^2: $S = 2\pi R : s$, и отсюда $S = s.\frac{R}{2}$.

Изъ уравненія $S = \frac{s.R}{2}$ слѣдуетъ, что *площади секторовъ одинакихъ радіусовъ относятся какъ дуги ихъ.*

Если означимъ чрезъ n число градусовъ, содержащихся въ дугѣ s, и замѣтимъ, что $s = \frac{2\pi R.n}{360}$ (§ 178), то получимъ $S = \frac{\pi R^2.\,n}{360}$.

Изъ этого уравненія слѣдуетъ, что *площади секторовъ, содержащихъ одинаков число градусовъ, относятся какъ квадраты ихъ радіусовъ.*

§ 182. Теорема. *Кругъ, котораго діаметръ равенъ гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, равновеликъ суммѣ круговъ, діаметры которыхъ суть катеты этого треугольника.*

Доказ. Пусть будетъ a гипотенуза, b и c катеты какого нибудь прямоугольнаго треугольника, P площадь круга, имѣющаго діаметръ a, Q и R площади круговъ, имѣющихъ діаметры b и c; требуется доказать, что $P = Q + R$.

Доказ. По § 180 имѣемъ:

$$P = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4};\ Q = \frac{\pi\, b^2}{4};\ R = \frac{\pi c^2}{4};$$

отсюда $Q + R = \pi\,\frac{(b^2 + c^2)}{4}$; а такъ какъ, по свойству прямоугольнаго треугольника (§ 147): $a^2 = b^2 + c^2$, то $Q + R = \frac{\pi a^2}{4}$, и потому $P = Q + R$.

Квадратура круга.

§ 183. Подъ *квадратурою круга* разумѣютъ задачу, состоящую въ опредѣленіи квадрата равновеликаго кругу.

Рѣшеніе этой задачи, съ помощію вычисленія, не представляетъ никакого затрудненія, потому что, означая радіусъ круга чрезъ R и сторону равновеликаго ему квадрата чрезъ x, имѣемъ $x^2 = \pi R^2$, слѣдов.

$$x = R\sqrt{\pi} = R\sqrt{3,1415926....} = R.\,1,7724518...,$$

и потому можно всегда опредѣлить x съ достаточною точностью.

По обыкновенно разумѣютъ подъ квадратурою круга построеніе квадрата, равновеликаго кругу, употребляя для этого только линейку и циркуль. Въ этомъ смыслѣ квадратура круга невозможна, потому что нельзя построить ирраціональное число π, она при томъ и безполезна, потому что, какъ сказано, можно всегда съ достаточною точностью опредѣлить сторону квадрата равновеликаго данному кругу. *)

---

*) Множество попытокъ, сдѣланныхъ для нахожденія квадратуры круга, — попытокъ, сопряжавшихся съ большею тратью времени и умственныхъ силъ, придали этому вопросу большую извѣстность. Чтобъ остановить безполезныя изъисканія по этому предмету, ученныя учрежденія согласились не принимать на разсмотрѣніе никакихъ разсужденій, относящихся къ этому вопросу, и это рѣшеніе имѣло желаемый успѣхъ: квадратурою круга стали заниматься съ тѣхъ поръ гораздо менѣе.

Подобную же участь, какъ квадратура круга, имѣла задача: *раздѣлить данный уголъ на три равныя части.* Эта задача также не можетъ быть разрѣшена геометрическимъ построеніемъ. Тѣмъ не менѣе она составляла предметъ многочисленныхъ изслѣдованій геометровъ древняго и новаго времени. ***Монтукла*** въ сочиненіи: Histoire des recherches sur la quadrature du cercle, сообщаетъ въ прибавленіи также исторію трисекціи угла. Всѣ изысканія объ этомъ вопросѣ, приводятся, какъ въ квадратурѣ круга, только къ приближеннымъ рѣшеніямъ.

Если въ безконечно нисходящей прогрессіи: $\frac{q}{1-q} = q + q^2 + q^3....$ положимъ $q = \frac{1}{4}$, то находимъ

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + ...;$$

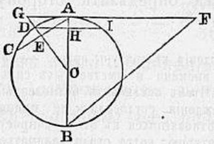
это выраженіе показываетъ какимъ образомъ можно, чрезъ послѣдовательное дѣленіе угловъ пополамъ, получить болѣе или менѣе приближенное раздѣленіе даннаго угла на три равныя части. Трисекція угла можетъ быть разрѣшена помощію высшей Геометріи, на пр. чрезъ пересѣченіе круга съ параболою; нѣкоторые же частные случаи, на пр. дѣленіе прямаго угла на три равныя части (зад. 122), могутъ быть рѣшены и элементарной Геометріею.

Хотя квадратура круга есть задача невозможная въ строгомъ смыслѣ, однако можно рѣшить ее приблизительно и притомъ съ такимъ приближеніемъ, которое болѣе нежели достаточно для всѣхъ приложеній.

Изъ уравненія $x^2 = \pi R^2$, находимъ $\frac{2\pi R}{x} = \frac{x}{{}^1/_2 R}$, и отсюда слѣдуетъ, что сторона квадрата равновеликаго кругу, есть средняя пропорціональная между окружностью и половиной радіуса; слѣдов. вопросъ объ опредѣленіи x приводится къ нахожденію прямой линіи равной окружности, или къ опредѣленію прямой равной 2π, если радіусъ круга примемъ за единицу.

Предлогаемъ здѣсь нѣкоторыя приближенныя рѣшенія этой задачи.

1. Сумма сторонъ равносторонняго треугольника и квадрата, вписанныхъ въ кругъ радіуса единицы, приблизительно равняется π. Въ самомъ дѣлѣ сторона вписаннаго треугольника (§ 133) равна $\sqrt{3}$, а сторона вписаннаго квадрата (§ 134) равна $\sqrt{2}$; но $\sqrt{3} + \sqrt{2} = 3{,}148\ldots$; слѣдов. сумма этихъ двухъ сторонъ равняется π съ точностію 0,01, т. е. съ точностью отношенія, найденнаго Архимедомъ.



Черт. 227.

2. Принимая радіусъ круга (черт. 227) равнымъ 1, проведемъ діаметръ AB и отложимъ хорду $AC = 1$. Опустивъ перпендикуляръ OG на хорду AC и проведя къ точкѣ A касательную AG, отложимъ на ней часть $GF = 3AO = 3$ и соединимъ точки F и B, тогда линія FB равняется π съ точностью 0,0001 *). Въ самомъ дѣлѣ проведя линію DI параллельно линіи GF, находимъ, что прямоугольные треугольники AOE и DOH, имѣющіе общій уголъ O и равные гипотенузы, равны; слѣдов. $DH = AE = \frac{1}{2}$. Изъ подобія же треугольник, GAO и DHO находимъ: $\frac{GA}{GO} = \frac{DH}{DO} = \frac{1}{2}$; слѣд. $GA = \frac{GO}{2}$; по этому $GA^2 = GO^2 - 1 = 4\,GA^2 - 1$, или $4GA^2 = GA^2 + 1$, и отсюда $GA^2 = \frac{1}{3}$. Далѣе

$$FB^2 = AB^2 + AF^2 = 2^2 + (3 - AG,^2 = 4 + \left(3 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2$$

$$= 4 + 9 + \frac{1}{3} - \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{40}{3} - 2\sqrt{3},$$

---

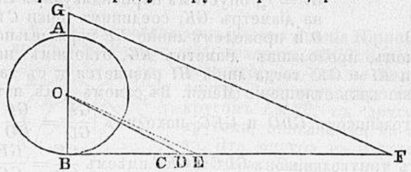
*) Это построеніе принадлежитъ Польскому Іезуиту Кохапскому (1685); оно отличается тѣмъ, что дѣлается однимъ раскрытіемъ циркуля.

поэтому

$$FB = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} = \sqrt{9{,}86923172} = 3{,}141533;$$

слѣдов. $\pi = FB$ съ точностью 0,0001.

3. Принимая радіусъ круга чер. 228) равнымъ 1, продолжимъ діаметръ AB и проведемъ къ точкѣ B касательную, на которой отложимъ часть $BC = 2, CD = \frac{1}{5}$ и $CE = \frac{3}{5}$. Соединивъ точки E и D съ центромъ, дѣлаемъ $BG = OD$, и проведемъ линію GF параллельно линіи OE, тогда $\frac{BF}{2}$ равняется π съ точностью 0,000001 *. Въ самомъ дѣлѣ, $BD = 2 + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}$; $EB = 2 + \frac{3}{5} = \frac{13}{5}$ и $GB = OD = \sqrt{1 + \left(\frac{11}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{146}}{5}$. Далѣе, изъ подобныхъ треугольниковъ GFB и OEB находимъ $\frac{FB}{GB} = \frac{EB}{OB}$, и отсюда



Черт. 228.

$$FB = \frac{EB.\,GB}{OB} = \frac{13}{5}.\frac{\sqrt{146}}{5} = \frac{13}{25}\sqrt{146} = \frac{13}{25}.12{,}08304597 = 6{,}28318392;$$

поэтому $\frac{FB}{2} = 3{,}141592$; слѣдоват. $\frac{FB}{2} = \pi$ съ точностью 0,000001.

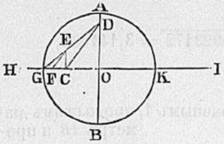
Это построеніе опредѣляетъ π съ такою же точностью какъ отношеніе Меціи.

4. Яковъ Гельдеръ, Профессоръ въ Лейденѣ, далъ слѣдующее построеніе π, основанное на отношеніи $\frac{355}{113}$.

Замѣтимъ, что $\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{133} = 3 + \frac{4^2}{7^2 + 8^2}$. Принявъ раді-

---

*) Это построеніе принадлежитъ Шпехту.



Черт. 229.

діусъ круга (черт. 229) равнымъ 1 и проведя два между собою перпендикулярныхъ діаметра AB и CK, отложимъ на радіусѣ OA часть $OD=\frac{7}{8}$ и соединимъ точки D и G. Если отложимъ на линіи GD часть $GE={}^1/_2$, опустимъ перпендикуляръ EC на діаметръ GK, соединимъ точки C и D и проведемъ линію EE параллельно линіи CD; наконецъ, продолживъ діаметръ KG, отложимъ на немъ $GH=GF$ и $KI=OK$; тогда линія HI равняется π съ такою же точностью какъ отношеніе Меціи. Въ самомъ дѣлѣ, изъ подобныхъ треугольниковъ GDO и GEC, находимъ $\frac{GE}{GD}=\frac{GC}{GO}$, а изъ подобныхъ треугольниковъ GDC и GEF имѣемъ $\frac{GE}{GD}=\frac{GF}{GC}$, перемножая, находимъ $\frac{GE^2}{GD^2}=\frac{GF}{GO}$; но

$$GE={}^1/_2;\ GD^2=DO^2+GO^2=\left(\frac{7}{8}\right)^2+1=\frac{7^2+8^2}{8^2};$$

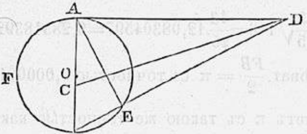
слѣдов.

$$GF=\frac{GO\ .\ GE^2}{GD^2}={}^1/_4\cdot\frac{8^2}{7^2+8^2}=\frac{4^2}{7^2+8^2},$$

и потому

$$HI=GI+HG=3+GF=3+\frac{4^2}{7^2+8^2}=\frac{355}{133}.$$

5. Принимая радіусъ круга (черт. 230) равнымъ единицѣ, проведемъ діаметръ AB и въ точкѣ A касательную AD, на радіусѣ OB отложимъ часть $OC={}^1/_6$ и опишемъ изъ C, радіусомъ равнымъ 4, окружность, которая пересѣчетъ касательную AD, положимъ, въ точкѣ D. Если соединимъ точки B и D и положимъ, что линія BD пересѣчетъ окружность въ точкѣ E; тогда линія AE будетъ сторона квадрата равновеликаго кругу $AEBF$ съ точностью 0,00001 (*).



Черт. 230.

Въ самомъ дѣлѣ $AD^2=DC^2-AC^2=4^2-\left(1\frac{1}{6}\right)^2=\frac{527}{36}$

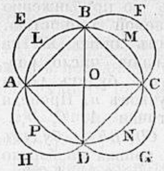
$$BD^2=AB^2+AD^2=4+\frac{527}{36}=\frac{671}{36}.$$

---

*) Это построеніе принадлежитъ Sonnet.

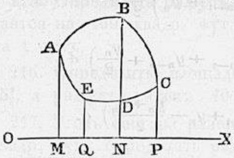
Но прямоугольные треугольники ABE и ABD, имѣющіе общій уголъ B, подобны, слѣдов. $\frac{AE}{AB}=\frac{AD}{BD}$ или $\frac{AE^2}{AB^2}=\frac{AD^2}{BD^2}$, и потому $AE^2=\frac{AB^2.\ AD^2}{BD^2}=4\ \frac{AD^2}{BD^2}=\frac{4.527}{671}=\frac{2108}{671}=3{,}14158$. Слѣдов. $AE^2\pi=$ съ точностью 0,00001; а такъ какъ площадь круга $AEBF$ равна π, то AE^2 равняется площади этого круга съ точностью 0,00001.

§ 184. *Гиппократова луночка* (lunula Hippocratis). Вписавъ въ кругъ $LMNP$ (черт. 231) квадратъ $ABCD$ и построивъ на каждой изъ сторонъ его по полукругу, получимъ фигуру, ограниченную съ одной стороны кругомъ $LMNP$, съ другой четырьмя полукругами, описанными на сторонахъ квадрата. Эта фигура называется *Гиппократовой луночкою*. Площадь этой луночки равна площади квадрата $ABCD$. *) Въ самомъ дѣлѣ, основываясь на томъ, что площади круговъ относятся какъ квадраты радіусовъ или діаметровъ, находимъ, что полукругъ AEB относится къ полукругу ABC, какъ AB^2 къ AC^2; а такъ какъ $AC^2=AB^2+BC^2=2\,AB^2$, то полукругъ AEB равенъ половинѣ полукруга ABC или квадранту $AOBL$. Если же отъ полукруга AEB и квадранта $AOBL$ отнимемъ по сегменту ALB, то найдемъ, что часть $AEBL$ луночки равняется AOB т. е. четвертой части квадрата, слѣдов. вся луночка равна всему квадрату.



Черт. 231.

§ 185. *Опредѣленіе площади криволинейныхъ фигуръ* Пусть будетъ $ABCE$ (черт. 232) фигура, ограниченная кривыми линіями AB, BC, CE и EA. Для опредѣленія площади ея проведемъ произвольную линію OX; эта линія называется *осью*, а перпендикуляръ, опущенный изъ какой нибудь точки кривой на ось,—*ординатою*. Проведя ординаты AM, BN, CP и EQ изъ всѣхъ точекъ пересѣченія послѣдовательныхъ кривыхъ линій, видимъ, что площадь $ABCE$ выразится разностью



Черт. 232.

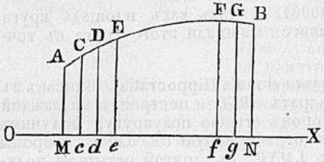
$$'(MABN+NBCP)-(MAEQ+QECP).$$

---

*) Замѣч. Это предложеніе, содержащее точную квадратуру криволинейной фигуры, приписывается Греческому Геометру Гиппократу изъ Хіоса (450 л. до Р. Х.). Подъ именемъ *луночки* разумѣютъ вообще фигуру, ограниченную двумя дугами, обращенными въ одну сторону.

Когда ось пересѣкаетъ фигуру, то площадь ея выразится суммою трапецій.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что опредѣленіе площади фигуры, ограниченной какими нибудь кривыми линіями, приводится къ опредѣленію площади, ограниченной двумя орданатами AM и BN (черт. 233), осью OX и кривою AB. Точное рѣшеніе этого вопроса не всегда возможно, даже съ помощію высшей математики; но можно опредѣлить площадь по приближенію съ желаемой точностью. Раздѣлимъ линію MN на значительное число равныхъ промежутковъ Mc, cd, de.... fg, gN; пусть будетъ длина каждаго изъ нихъ d, а число всѣхъ промежутковъ n. Проведя ординаты Cc, Dd, Ee... замѣтимъ, что если точки A, C, D,... весьма близки между собою, то дуги AC, CD, DE... будутъ мало отличаться отъ прямыхъ линій, и вся кривая AB близко подходить къ многоугольнику, проходящему чрезъ точки A, C, D... G, B. Означимъ площадь, ограниченную этимъ многоугольникомъ, чрезъ M и ординаты AM, Cc, Dd,... Ff, Gg, BN чрезъ y_0, y_1, y_2.... y_{n-2} y_{n-1}, y_n, тогда



Черт. 233.

$$M = \left(y_0 + y_1\right)\frac{d}{2} + \left(y_1 + y_2\right)\frac{d}{2} + \left(y_2 + y_3\right)\frac{d}{2}\ldots$$

$$+ \left(y_{n-2} + y_{n-1}\right)\frac{d}{2} + \left(y_{n-1} + y_n\right)\frac{d}{2}$$

$$= \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 \ldots + y_{n-2} + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) d$$

$$= \left(y_0 + y_1 + y_2 \ldots + y_{n-1} + y_n - \frac{y_0 + y_n}{2}\right) d.$$

Такъ какъ M приблизительно равняется площади, ограниченной кривою AB, то мы заключаемъ, что *площадь, ограниченная какой нибудь кривой, равняется, приблизительно, промежутку между двумя послѣдовательными ординатами, умноженному на сумму всѣхъ ординатъ уменьшенную полуразностью крайнихъ ординатъ.*

Задачи.

206. Опредѣлить отношеніе двухъ центральныхъ угловъ, которыхъ дуги суть s и s_1, а радіусы r и r_1.

207. Опредѣлить площадь круга, котораго діаметръ равенъ 43,6 фут.

208. Опредѣлить площадь круга, котораго окружность равна 84,6 фут.

209. Радіусъ экватора равенъ 6376984 метрамъ; какое пространство проходитъ каждая изъ его точекъ въ секунду?

210. Діаметръ заднихъ колесъ кареты равенъ 1,2 арш. и діаметръ переднихъ 0,8 арш. Сколько разъ обращаются колеса, когда карета проходитъ пространство одной версты?

211. Опредѣлить длину дуги въ 18°26′, которой радіусъ равенъ 0,92 фут.

212. Подъ широтою 47° длина каждаго градуса долготы, т. е. каждаго градуса параллельнаго круга, равна 75782 метрамъ; опредѣлить радіусъ этого параллельнаго круга.

213. По данному радіусу r, данной дугѣ s и соотвѣтствующей хордѣ c, опредѣлить площадь сегмента.

214. Опредѣлить діаметръ круга, равновеликаго квадрату, котораго сторона равна 60 фут.

215. Опредѣлить радіусъ круга, котораго площадь увеличивается на 100 квадр. фут., когда радіусъ его увеличивается на 1 футъ.

216. Опредѣлить площадь сектора, котораго уголъ равенъ 75°, а радіусъ равенъ 10 фут.

217. Уголъ сектора равенъ 43°3′18″, а площадь равна 10000 квадр. фут; опредѣлить радіусъ сектора.

218. Опредѣлить радіусъ круга, равновеликаго суммѣ нѣсколькихъ круговъ, которыхъ радіусы суть r_1, r_2, r_3....

219. Опредѣлить радіусъ круга, равновеликаго разности двухъ круговъ, которыхъ радіусы суть r_1 и r_2.

220. Опредѣлить четыре круга, которыхъ сумма равна кругу радіуса r и которыхъ радіусы относятся между собою какъ m: n: p: q.

221. Раздѣлить площадь круга, котораго радіусъ равенъ r, концентрическими окружностями на m равныхъ частей.

222. Изъ двухъ концентрическихъ круговъ площадь меньшаго круга равна k^2, а разность радіусовъ двухъ круговъ равна d; опредѣлить площадь, заключенную между этими двумя кругами.

223. Даны двѣ концентрическихъ окружностей, построить кругъ равновеликій площади, заключенной между двумя данными окружностями.

ЧАСТЬ II.

СТЕРЕОМЕТРІЯ.

ГЛАВА I.

О линіяхъ и плоскостяхъ въ пространствѣ.

Опредѣленіе положенія плоскости. Линіи перпендикулярныя къ плоскости. Линіи параллельныя между собою. Линіи параллельныя плоскости. Плоскости параллельныя между собою. Задачи.

Опредѣленіе положенія плоскости.

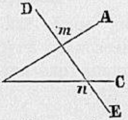
§ 186. *Плоскостью* называется такая поверхность, съ которою совпадаетъ всякая прямая, имѣющая съ ней двѣ общія точки (см. Введеніе). Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что прямая линія пересѣкаетъ плоскость не болѣе какъ въ одной точкѣ, потому что при двухъ общихъ точкахъ вся прямая совпадаетъ съ плоскостью.

Точка пересѣченія прямой съ плоскостью называется иногда *основаніемъ* прямой.

§ 187. Теорема. *Чрезъ три точки A, B и C, не лежащія на одной прямой, можно провести только одну плоскость.*

Доказ. Проведя плоскость чрезъ линію, которая соединяетъ точки A и B, можно вообразить, что плоскость обращается около этой линіи до тѣхъ поръ, пока не встрѣтитъ точку C; слѣдов. чрезъ три точки можно всегда провести плоскость.

Но болѣе одной плоскости чрезъ три точки A, B и C, не лежащихъ на одной прямой, провести нельзя. Въ самомъ дѣлѣ, вообразивъ чрезъ точки A, B и C (черт. 234) плоскость и на этой плоскости какую-нибудь прямую линію ED, положимъ, что эта прямая пересѣкаетъ линіи BC и BA въ точкахъ m и n. Если бы возможно было провести чрезъ тѣже точки A, B и C еще другую плоскость, то въ этой послѣдней лежали бы линіи AB и AC, слѣдов. и точки m и n, т. е. вся линія ED, такъ что всякая линія, лежащая въ первой плоскости, лежала бы также и во второй: а это значитъ, что обѣ плоскости совпадаютъ.



Черт. 234.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ:

1. Три точки, не лежащія на одной прямой, опредѣляютъ положеніе плоскости въ пространствѣ.

2. Такъ какъ положеніе прямой линіи опредѣляется двумя точками, то прямая линія и точка, лежащая внѣ ея, опредѣляютъ положеніе плоскости.

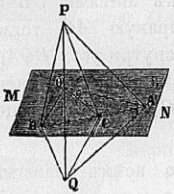
3. Двѣ пересѣкающіяся прямыя опредѣляютъ положеніе плоскости.

4. Такъ какъ двѣ параллельныя линіи, по опредѣленію, лежатъ въ одной плоскости, а положеніе ихъ въ этой плоскости опредѣляется тремя точками, то двѣ параллельныя линіи опредѣляютъ положеніе плоскости.

5. Пересѣченіе двухъ плоскостей есть прямая линія, потому что если бы въ пересѣченіи ихъ были хоть три точки, не лежащихъ на одной прямой, то обѣ плоскости совпадали.

Линіи перпендикулярныя къ плоскости.

§ 188. Теорема. *Если прямая перпендикулярна къ двумъ линіямъ, проведеннымъ чрезъ ея основаніе на плоскости, то она перпендикулярна также ко всякой другой линіи, проведенной чрезъ ея основаніе на той же плоскости.*

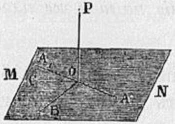


Черт. 235.

Положимъ, что линія PO (черт. 235) перпендикулярна къ двумъ линіямъ OA и OB, проведеннымъ на плоскости MN чрезъ ея основаніе O; требуется доказать, что прямая PO перпендикулярна также ко всякой другой линіи OC, проведенной на плоскости MN чрезъ точку O.

Доказ. Проведемъ на плоскости MN произвольную линію AB, которая пересѣчетъ прямыя OB, OC и OA въ точкахъ B, C и A; за тѣмъ, продолживъ линію PO по другую сторону плоскости, отложимъ на продолженіи ея часть $OQ = OP$ и соединимъ точки A, B и C съ точками P и Q. Прямоугольные треугольники POB и QOB, имѣющіе равные катеты, равны между собою, также равны и прямоугольные треугольники POA и QOA; слѣд. $PB=QB$ и $PA=QA$. Вслѣдствіе этого треугольники BPA и BQA, имѣющіе три стороны соотвѣтственно равныя, равны между собою; слѣдов. $\angle PAB = \angle QAB$. Изъ этого слѣдуетъ, что треугольники PAC и QAC равны, потому что имѣютъ общую сторону AC и кромѣ того, по доказанному, $PA = QA$ и $\angle PAC = \angle QAC$; слѣдов. $PC = QC$. Наконецъ треугольники POC и QOC, имѣющіе общую сторону OC и, по построенію, $OP=OQ$, а, по доказанному, $PC = QC$, равны; слѣдов. $\angle POC = \angle QOC$, т. е. линія PO перпендикулярна къ линіи OC, что и требовалось доказать.

Мы предположили, что линія OC (черт. 235) содержится внутри угла AOB; но доказанная теорема справедлива и въ томъ случаѣ, когда линія OC (черт. 236) лежитъ внѣ угла AOB. Въ самомъ дѣлѣ, предположивъ, что линія OP перпендикулярна къ линіямъ OB и OA, продолжимъ прямую AO; тогда линія OC лежитъ внутри угла BOA_1, составленнаго двумя линіями перпендикулярными къ OP; слѣдов. линія PO, по предъидущему, перпендикулярна къ прямой OC.

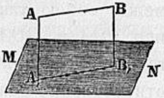


Черт. 236.

§ 189. Линія, перпендикулярная ко всѣмъ прямымъ, проведеннымъ на плоскости чрезъ ея основаніе, называется *перпендикуляромъ къ этой плоскости.*

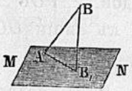
Изъ предъидущаго § слѣдуетъ, что линія, перпендикулярная къ двумъ прямымъ, проведеннымъ на плоскости чрезъ ея основаніе, будетъ перпендикулярна къ самой плоскости.

Еслъ изъ какой-нибудь точки A (черт. 237) опустимъ перпендикуляръ AA_1 на плоскость MN, то основаніе A_1 перпендикуляра называется *проэкціею* точки A. Если же изъ двухъ концовъ A и B прямой AB опустимъ перпендикуляры AA_1 и BB_1 на плоскость MN и соединимъ основанія этихъ перпендикуляровъ, то прямая A_1B_1 называется *проэкціею* линіи AB; это значитъ *проэкція прямой есть линія, соединяющая проэкціи двухъ концевъ ея.*



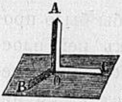
Черт. 237.

Если одинъ конецъ A прямой AB (черт. 238) лежитъ на самой плоскости, то опустивъ изъ другаго конца B перпендикуляръ BB_1, соединимъ точки A и B_1; прямая AB_1 называется въ этомъ случаѣ также проэкціею линіи AB.



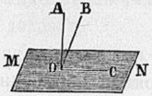
Черт. 238.

Для проведенія перпендикуляра къ плоскости употребляется приборъ (черт. 239), состоящій изъ двухъ прямыхъ угловъ AOC и AOB, соединенныхъ между собою общею стороною OA.



Черт. 239.

§ 190. **Теорема.** *Во всякой точкѣ плоскости можно возставить къ ней только одинъ перпендикуляръ.*



Черт. 240.

Положимъ, что линія OA (черт. 240) перпендикулярна къ плоскости MN; требуется доказать, что всякая другая линія OB, проведенная чрезъ основаніе O, не будетъ перпендикулярна къ плоскости MN.

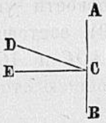
Доказ. Если линія OB была бы перпендикулярна къ плоскости MN, то, вообразивъ чрезъ OA и OB плоскость, положимъ, что она пересѣчетъ плоскость MN по линіи OC; тогда углы AOC и BOC были бы прямые, что очевидно не возможно (§ 5).

§ 191. **Теорема.** *Изъ всякой точки, лежащей внѣ плоскости, можно опустить на нее только одинъ перпендикуляръ.*

Положимъ что изъ точки B (черт. 238) опущенъ перпендикуляръ BB_1 на плоскость MN; требуется доказать, что всякая другая линія BA, проведенная чрезъ точку B, не будетъ перпендикулярна къ плоскости MN.

Доказ. Если линія BA была бы перпендикулярна къ плоскости MN, то соединивъ точки A и B_1, получили бы треугольникъ ABB_1, имѣющій два прямыхъ угла BAB_1 и AB_1B, что не возможно (§ 40, слѣдств. 6).

§ 192. **Теорема.** *Чрезъ всякую точку прямой можно провести только одну плоскость къ ней перпендикулярную.*

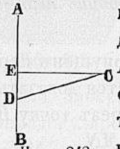


Черт. 241.

Доказ. Положимъ, что чрезъ точку C прямой AB (черт. 241) можно бы было провести двѣ перпендикулярныя къ ней плоскости, и пусть будутъ CD и CE линіи пересѣченія этихъ плоскостей съ какой нибудь плоскостью, проходящею чрезъ линію AB; тогда линіи CD и CE, лежащія въ одной плоскости, были бы обѣ перпендикулярны къ прямой AB, что очевидно не возможно (§ 5).

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что всѣ линіи, проведенныя чрезъ одну и туже точку прямой перпендикулярно къ ней, лежатъ въ одной плоскости, потому что если бы онѣ лежали въ различныхъ плоскостяхъ, то чрезъ одну и ту же точку прямой проходили бы нѣсколько плоскостей къ ней перпендикулярныхъ.

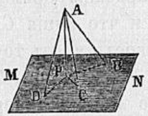
§ 193. Теорема. *Чрезъ всякую точку, лежащую внѣ прямой, можно провести только одну плоскость къ ней перпендикулярную.*



Черт. 242.

Доказ. Положимъ, что чрезъ точку C (черт. 242) можно-бы было провести двѣ плоскости перпендикулярныхъ къ линіи AB и пусть будутъ E и D точки пересѣченія этихъ плоскостей съ прямой AB; соединивъ точки E и D съ точкою C, получили бы треугольникъ ECD, въ которомъ углы DEC и EDC были бы прямые, что очевидно не возможно.

§ 194. Теорема. *Если изъ точки, лежащей внѣ плоскости, проведемъ къ ней перпендикуляръ и наклонныя линіи, то 1) перпендикуляръ короче всякой наклонной, 2) наклонныя, имѣющія равныя проэкціи, равны и 3) изъ двухъ наклонныхъ та, которая имѣетъ большую проэкцію, будетъ больше другой.*



Черт. 243.

Доказ. 1. Положимъ, что AP (черт. 243) есть перпендикуляръ, опущенный изъ какой нибудь точки A на плоскость MN, а AB какая нибудь наклонная; требуется доказать, что $AB > AP$.

Соединивъ точки P и B, составимъ прямоугольный треугольникъ APB, въ которомъ AB есть гипотенуза; слѣд. $AB > AP$ (§ 28), что и требовалось доказать.

2. Пусть будутъ AB и AD двѣ наклонныя, которыхъ проэкціи PB и PD равны; требуется доказать, что $AB = AD$.

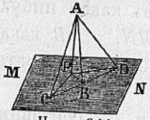
Соединивъ точки B и D съ точкою P, составимъ два прямоугольныхъ треугольника APB и APD, которые имѣютъ общій катетъ AP и кромѣ того, по положенію, $PB = PD$; слѣдов. эти треугольники равны, а потому $AB = AD$, что и требовалось доказать.

3. Пусть будутъ AB и AC двѣ наклонныя, которыхъ проэкціи PC и PB неравны, и положимъ $PB > PC$; требуется доказать, что $AB > AC$.

Соединивъ точки B и C съ точкою P, составимъ два прямоугольныхъ треугольника APB и APC, которые имѣютъ общій катетъ AP, но катетъ PB, по положенію, больше катета PC; слѣд. $AB > AC$ (§ 58), что и требовалось доказать.

Изъ сказаннаго мы заключаемъ, что перпендикуляръ есть кратчайшее разстояніе точки отъ плоскости, и поэтому разстояніе точки отъ плоскости измѣряется длиною перпендикуляра, опущеннаго изъ этой точки на плоскость.

§ 195. Теорема. *Линія, проведенная на плоскости чрезъ основаніе наклонной перпендикулярно къ ея проэкціи, будетъ перпендикулярна и къ этой наклонной.*



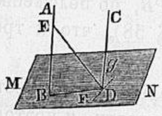
Черт. 244.

Положимъ, что PB (черт. 244) есть проэкція прямой AB на плоскости MN, и что линія CD проведена на этой плоскости чрезъ точку B перпендикулярно къ линіи PB; требуется доказать, что линія CD перпендикулярна къ линіи AB.

Доказ. Отложивъ на линіи CD части BC и BD равныя между собою, соединимъ точки C и D съ точками A и P. Прямоугольные треугольники PBC и PBD, имѣющіе равные катеты, равны; слѣдов. $PD = PC$; вслѣдствіе этого прямоугольные треугольники APD и APC, имѣющіе общій катетъ AP и $PC = PD$, также равны, и потому $AC = AD$. Наконецъ треугольники ABC и ABD равны, потому что имѣютъ общую сторону AB и кромѣ того $CB = BD$ и $AC = AD$. Изъ равенства этихъ треугольниковъ слѣдуетъ $\angle CBA = \angle DBA$, т. е. линія AB перпендикулярна къ линіи CD, что и требовалось доказать.

Линіи параллельныя между собою.

§ 196. Теорема. *Если изъ двухъ параллельныхъ линій одна перпендикулярна къ плоскости, то и другая къ этой плоскости перпендикулярна.*



Черт. 245.

Положимъ, что линіи AB и CD (черт. 245) параллельны между собою и прямая AB перпендикулярна къ плоскости MN; требуется доказать, что линія CD также перпендикулярна къ плоскости MN.

Доказ. Вообразимъ чрезъ линіи AB и CD плоскость и положимъ, что она пересѣчетъ плоскость MN по линіи BD. Проведя на плоскости MN линію Fg перпендикулярно къ линіи BD и соединивъ точку D съ какой нибудь точкою E прямой AB, находимъ, по § 195, что линія FD перпендикулярна къ прямой ED. Вслѣдствіе этого линія FD, перпендикулярная къ двумъ линіямъ BD и DE лежащимъ въ плоскости $ABDC$, будетъ перпендикулярна къ этой плоскости, а потому уголъ CDF будетъ прямой. Но вслѣдствіе параллельности линій AB и CD прямая CD перпендикулярна къ линіи BD, а такъ какъ, по доказанному, эта же линія CD перпендикулярна къ прямой FD, то она перпендикулярна къ плоскости MN (§ 189).

§ 197. Теорема. *Двѣ линіи перпендикулярныя къ одной плоскости параллельны между собою.*

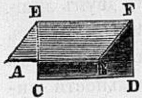
Положимъ, что линіи AB и CD (черт. 245) перпендикулярны къ плоскости MN; требуется доказать, что эти линіи параллельны между собою.

Доказ. Если бы линіи AB и CD не были параллельны, то вообразимъ чрезъ точку B линію параллельную прямой CD; эта линія, по предъидущему §, будетъ перпендикулярна къ плоскости MN, и такимъ образомъ въ точкѣ B получились бы два перпендикуляра къ плоскости MN.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что, такъ какъ двѣ параллельныя линіи лежатъ всегда въ одной плоскости, то всякая прямая линія и проэкція ея лежатъ въ одной плоскости.

§ 198. Теорема. *Двѣ линіи A и B, параллельныя третьей линіи C, параллельны между собою.*

Доказ. Вообразимъ плоскость перпендикулярную къ прямой C и замѣтимъ, что, по § 196, линіи A и B перпендикулярны къ этой плоскости; слѣдов. линіи A и B, какъ перпендикуляры къ одной и той же плоскости, параллельны между собою.

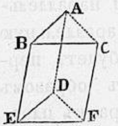


Черт. 246.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что если двѣ пересѣкающіяся плоскости $ABFE$ и $ECDF$ (черт. 246) проходятъ чрезъ параллельныя линіи AB и CD, то линія пересѣченія EF этихъ плоскостей также параллельна этимъ линіямъ.

Въ самомъ дѣлѣ, проведя чрезъ какую нибудь точку линіи EF прямую параллельную AB, найдемъ, по предъидущему, что эта прямая параллельна линіи CD; слѣдов. она лежитъ какъ въ плоскости $EABF$ такъ и въ плоскости $ECDF$ и сливается поэтому съ линіею пересѣченія этихъ плоскостей.

§ 199. Теорема. *Углы съ параллельными сторонами, обращенные своими отверстіями въ одну сторону, равны между собою.*



Черт. 247.

Положимъ (черт. 247), что $BA \parallel ED$ и $BC \parallel EF$; требуется доказать, что углы ABC и DEF равны между собою, предполагая, что эти углы находятся въ различныхъ плоскостяхъ.

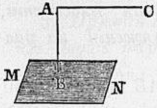
Доказ. Отложимъ на сторонахъ двухъ угловъ $BA=ED$ и $BC = EF$ и соединимъ точки A, B и C съ точками D, E и F, также точку A съ точкою C и точку D съ точкою F. Такъ какъ линія AB равна и параллельна линіи ED и линія BC равна и параллельна линіи EF, то четыреугольники $ABED$ и $CBEF$ суть параллелограммы (§ 43); слѣдов. линія AD равна и параллельна линіи BE и линія CF равна и параллельна этой же линіи BE, а потому AD и CF равны и параллельны между собою. Изъ этого слѣдуетъ, что четыреугольникъ $ACFD$ есть также параллелограммъ и потому $AC = DF$. Замѣтивъ теперь, что въ треугольникахъ ABC и DEF, по положенію, $AB = ED$ и $BC = EF$, а по доказанному $AC = DF$, заключаемъ, что эти треугольники равны, слѣд. $\angle ABC = \angle DEF$.

Линіи параллельныя плоскости.

§ 200. Линія и плоскость, которыя не встрѣчаются сколько бы ихъ ни продолжали, называются *параллельными.*

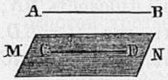
Изъ этого слѣдуетъ:

1. *Линія AC и плоскость MN* (черт. 248), *перпендикулярныя къ одной и той же прямой AB, параллельны между собою*, потому что, если бы прямая AC встрѣтилась съ плоскостью MN, то изъ точки ихъ встрѣчи можно бы было опустить два перпендикуляра на линію AB.



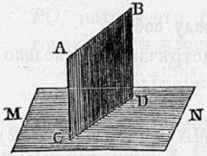
Черт. 248.

2. *Линія AB, параллельная прямой CD, лежащей въ плоскости MN* (черт. 249), *будетъ параллельна самой плоскости MN*, потому что AB, находясь съ своею параллелью CD въ одной плоскости, можетъ встрѣчаться съ плоскостью MN не иначе, какъ пересѣкаясь съ своею параллелью CD.



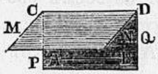
Черт. 249.

3. *Всякая плоскость $ABDC$* (черт. 250), *проходящая чрезъ прямую AB параллельную плоскости MN, пересѣчетъ эту послѣднюю по линіи CD, параллельной прямой AB*, потому что прямая AB, находясь съ линіею CD въ одной плоскости, можетъ съ нею встрѣчаться не иначе какъ пересѣкаясь съ плоскостью MN.

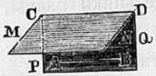


Черт. 250.

4. *Прямая AB* (черт. 251), *параллельная двумъ пересѣкающимся плоскостямъ MN и PQ, параллельна ихъ пересѣченію CD.* Въ самомъ дѣлѣ, вообразивъ плоскость чрезъ линію AB и какую-нибудь точку C линіи



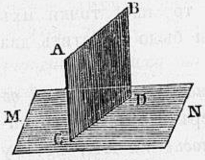
Черт. 251.



Черт. 251.

пересѣченія, заключаемъ, по предъидущему (3), что эта плоскость пересѣчетъ MN и PQ по линіямъ параллельнымъ прямой AB; и такъ какъ эти линіи проходятъ чрезъ точку C, а чрезъ точку C можно провести только одну линію параллельную прямой AB, то эти линіи сливаются между собою и совпадаютъ съ линіею CD; слѣд. линія CD будетъ параллельна линіи AB.

§ 201. Теорема. *Линія, параллельная плоскости, находится отъ нея на всемъ своемъ протяженіи на равномъ разстояніи.*



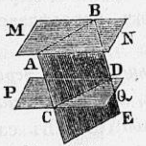
Черт. 250.

Пусть будетъ AB (черт. 250) линія параллельная плоскости MN; опустимъ изъ какихъ-нибудь точекъ этой линіи A и B перпендикуляры AC и BD на плоскость MN; требуется доказать, что $AC=BD$. *Доказ.* Замѣтивъ, что линіи AC и BD, какъ перпендикуляры къ плоскости MN, параллельны, вообразимъ чрезъ эти линіи плоскость; по § 200 слѣдств. 3, линія пересѣченія CD этой плоскости съ плоскостью MN параллельна прямой AB; изъ этого слѣдуетъ что $AC = BD$ (§ 37).

Плоскости параллельныя между собою.

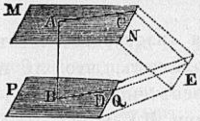
§ 202. Плоскости, которыя не встрѣчаются, сколько бы ихъ ни продолжали, называются *параллельными*.

Изъ этого слѣдуетъ:



Черт. 252.

1. *Двѣ параллельныя плоскости MN и PQ* (черт. 252) *пересѣкаются третьею плоскостью AE по линіямъ AB и CD параллельнымъ между собою,* потому что эти линіи, находясь въ одной плоскости AE, на всемъ своемъ продолженіи не могутъ встрѣчаться, иначе и плоскости MN и PQ встрѣтились бы.



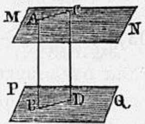
Черт. 253.

2. *Двѣ плоскости MN и PQ* (черт. 253), *перпендикулярныя къ прямой AB, параллельны между собою.* Въ самомъ дѣлѣ, если бы эти плоскости встрѣтились, то проведя чрезъ линію AB и чрезъ какую-нибудь точку E ихъ пересѣченія плоскость $CABDE$, нашли бы, что изъ точки E опущены два перпендикулура ECA и EDB на линію AB.

3. *Прямая AB* (черт 253), *перпендикулярная къ одной изъ двухъ параллельныхъ плоскостей MN и PQ, перпендикулярна также и къ другой.* Въ самомъ дѣлѣ, предположивъ, что линія AB перпендикулярна къ плоскости MN, и проведя чрезъ эту линію какую-нибудь плоскость $CABD$, найдемъ, что линіи AC и BD параллельны между собою, какъ линіи пересѣченія двухъ параллельныхъ плоскостей третьею плоскостью; а такъ какъ линія AB перпендикулярна къ прямой AC, то она перпендикулярна также къ прямой BD; это значитъ, что прямая AB перпендикулярна ко всякой прямой, проведенной чрезъ ея основаніе на плоскости PQ.

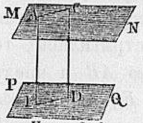
4. *Чрезъ данную точку A* (черт. 253) *можно провести только одну плоскость параллельную данной плоскости PQ,* потому что, если бы возможно было провести чрезъ точку A двѣ плоскости параллельныя плоскости PQ, то вообразивъ линію AB перпендикулярную къ плоскости PQ, нашли бы, что линія AB перпендикулярна къ двумъ плоскостямъ, проходящимъ чрезъ одну и туже точку A, что противно § 192.

§ 203. Теорема. *Параллельныя линіи, заключенныя между двумя параллельными плоскостями, равны между собою.*



Черт. 254.

Положимъ, что AB и CD (черт. 254) отрѣзки двухъ параллельныхъ линій, заключенные между двумя параллельными плоскостями MN и PQ; требуется доказать, что $AB = CD$.

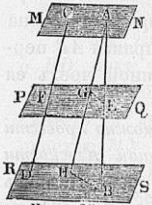


Черт. 254.

Доказ. Проведя плоскость чрезъ линіи AB и CD, положимъ, что AC и BD суть линіи пересѣченія этой плоскости съ плоскостями MN и PQ. По § 202, слѣдс. 1, линіи AC и BD параллельны между собою, и потому AB и CD, какъ отрѣзки параллельныхъ между параллельными, равны (§ 37).

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что *двѣ параллельныя плоскости на всемъ своемъ протяженіи находятся на равномъ разстояніи другъ отъ друга*, потому что перпендикуляры, опущенные изъ какихъ-нибудь точекъ одной плоскости на другую, параллельны, слѣд. по предъидущему, равны между собою.

§ 204 Теорема. *Три параллельныя плоскости пересѣкаютъ какія-нибудь двѣ прямыя на части пропорціональныя.*



Черт. 255.

Положимъ, что какія-нибудь двѣ линіи AB и CD (черт. 255) пересѣчены тремя параллельными плоскостями MN, PQ и RS; требуется доказать, что

$$\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FD}.$$

Доказ. Проведя линію AH параллельно линіи CD, проведемъ чрезъ AB и AH плоскость, которая пересѣчетъ плоскости PQ и RS по линіямъ EG и BH параллельнымъ между собою, слѣдов.

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AG}{GH},$$

а такъ какъ $AG = CF$ и $GH = FD$ (§ 203), то

$$\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FD}.$$

Задачи.

224. Изъ точки A, лежащей на плоскости MN, возставить къ ней перпендикуляръ.

225. Изъ точки O, лежащей внѣ плоскости MN, опустить на нее перпендикуляръ.

226. Чрезъ точку O провести линію, параллельную линіи AB.

227. Чрезъ точку O провести линію, параллельную плоскости MN.

228. Чрезъ точку O провести плоскость, перпендикулярную къ линіи AB.

229. Чрезъ точку O провести плоскость, параллельную двумъ прямымъ AB и MN, лежащимъ въ разныхъ плоскостяхъ.

230. Чрезъ прямую AB провести плоскость, параллельную прямой MN.

231. Чрезъ точку O провести плоскость, параллельную плоскости MN.

232. Найти кратчайшее разстояніе двухъ прямыхъ AB и MN.

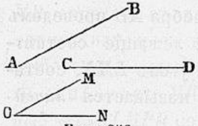
ГЛАВА II.

Объ углакъ образуемыхъ плоскостями

Уголъ двухъ линій и уголъ линіи съ плоскостью. Углы двугранные. Углы многогранные. Равенство и симетрія трегранныхъ угловъ.

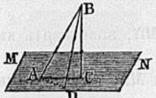
Уголъ двухъ линій и уголъ линіи съ плоскостію.

§ 205. Угломъ двухъ линій AB и CD (черт. 256), не лежащихъ въ одной плоскости, называется уголъ MON, составленный двумя линіями OM и ON, которыя проведены изъ какой нибудь точки O параллельно линіямъ AB и CD. Очевидно, что изъ какой бы точки ни проводили линіи параллельныя къ AB и CD, уголъ между ними всегда одинъ и тотже (§ 199).



Черт. 256.

§ 206. Угломъ линіи *AB* съ плоскостью *MN* (черт. 257) называется уголъ *BAC*, составленный этой линіею съ ея проэкціею *AC*.

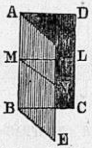


Черт. 257.

Если чрезъ основаніе линіи *AB* проведемъ на плоскости *MN* произвольную линію *AD*, возьмемъ $AD=AC$ и соединимъ точки *D* и *B*, то треугольники *CAB* и *DAB* будутъ имѣть общую сторону *AB* и $AC = AD$; но сторона *BD* болѣе стороны *BC*, потому что линія *BC*, по положенію, перпендикулярна къ плоскости *MN*; слѣдов. уголъ *BAD* больше угла *BAC* (§ 19); это значитъ, что *уголъ BAC менѣе всякаго угла, составленнаго прямой AB съ какой нибудь линіею, проведенной на плоскости MN чрезъ ея основаніе.*

Двугранные углы.

§ 207. Неограниченная часть пространства, находящаяся между двумя пересѣкающимися плоскостями *ABCD* и *ABEF* (черт. 258), называется *двуграннымъ угломъ*; плоскости *ABCD* и *ABEF* называются *сторонами*, а линія пересѣченія ихъ *AB*—*ребромъ* или *вершиною* его.



Черт. 258.

Двугранный уголъ означается четырьмя буквами *CABE*, поставленными въ такомъ порядкѣ, что буквы, означающія ребро, ставятся между двумя другими буквами.

Если изъ какой нибудь точки *M* ребра *AB* проведемъ къ нему перпендикуляры *ML* и *MN*, лежащіе соотвѣтственно въ плоскостяхъ *AC* и *AE*, то уголъ *LMN*, составленный этими перпендикулярами, называется *линейнымъ угломъ* двуграннаго угла.

Плоскость, проходящая чрезъ линіи *ML* и *MN*, будетъ перпендикулярна къ ребру *AB* (§ 189); слѣдов. линейный уголъ образуется также пересѣченіемъ сторонъ

двуграннаго угла плоскостью, перпендикулярною къ ребру его.

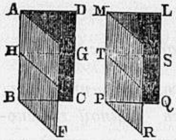
Линейные углы, построенные въ различныхъ точкахъ ребра, равны между собою, потому что стороны этихъ угловъ перпендикулярны къ ребру двуграннаго угла и вслѣдствіе этого соотвѣтственно параллельны. Изъ этого слѣдуетъ, что для каждаго двуграннаго угла линейный уголъ его есть величина постоянная.

При пересѣченіи двухъ плоскостей образуется четыре двугранныхъ угла, которые, по аналогіи съ плоскими углами, по парно называются *смежными* и *противуположными*.

Когда два смежныхъ двугранныхъ угла равны между собою, то каждый изъ нихъ называется *прямымъ*, а плоскости, образующія его, — *перпендикулярными*.

§ 208. Теорема. *Двугранные углы равны, когда линейные углы ихъ равны.*

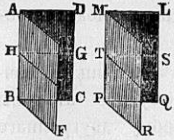
Пусть будутъ *GHI* и *STU* (черт. 259) линейные углы двугранныхъ угловъ *DABF* и *LMPR* и положимъ, что $\angle GHI = \angle STU$; требуется доказать, что и двугранные углы равны между собою.



Черт. 259.

Доказ. Наложимъ двугранный уголъ *LMPR* на двугранный уголъ *DABF*, такъ чтобъ уголъ *STU* совмѣстился съ угломъ *GHI*; ребро *MP* совпадетъ съ ребромъ *AB*, потому что каждое ребро перпендикулярно къ плоскости линейнаго угла; вслѣдствіе этого плоскость *MQ* совмѣстится съ плоскостью *AC* и плоскость *MR*—съ плоскостью *AF*, такъ что двугранный уголъ *LMPR* совпадетъ съ двуграннымъ угломъ *DABF*.

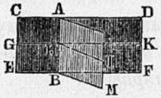
Обратная теорема. Если двугранные углы DABF и LMPR (черт. 259) *равны, то линейные ихъ углы GHI и STU также равны.*



Черт. 259.

Доказ. Наложимъ двугранный уголъ *LMPR* (черт. 259) на двугранный уголъ *DABF* такъ, чтобы стороны ихъ совпали и точка *T* упала на точку *H*; линія *TS* совпадетъ съ линіею *HG*, потому что эти линіи лежатъ на сторонѣ двуграннаго угла и перпендикулярны къ ребру его; равнымъ образомъ линія *TU* совпадетъ съ линіею *HI*; слѣдов. уголъ *STU* совмѣстится съ угломъ *GHI*.

Изъ предложеній этого § слѣдуетъ:

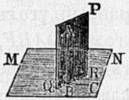


Черт. 260.

1. *Прямому двугранному углу соотвѣтствуетъ и прямой линейный уголъ и наоборотъ.* Въ самомъ дѣлѣ смежнымъ двуграннымъ угламъ *DABM* и *CABM* (черт. 260) соотвѣтствуютъ смежные линейные углы *IHK* и *IHG*, лежащіе въ плоскости перпендикулярной къ ребру *AB*; когда же смежные двугранные углы равны, то смежные линейные ихъ углы также равны и наоборотъ.

2. *Противуположные двугранные углы равны между собою.*

§ 209. ТЕОРЕМА. *Плоскость, проходящая чрезъ линію перпендикулярную къ данной плоскости, будетъ перпендикулярна къ этой послѣдней.*



Черт. 261.

Положимъ, что плоскость *PQ* (черт. 261) проходитъ чрезъ линію *AB* перпендикулярную къ плоскости *MN*; требуется доказать, что плоскости *PQ* и *MN* перпендикулярны между собою.

Доказ. Проведемъ на плоскости *MN* линію *BC* перпендикулярную къ линіи пересѣченія *QR* двухъ плоскостей. Такъ какъ линія *AB*, по положенію, перпендикулярна къ плоскости *MN*, то уголъ *ABC* прямой; но этотъ уголъ есть линейный уголъ двуграннаго угла *PRQN*, слѣдов. этотъ двугранный уголъ прямой.

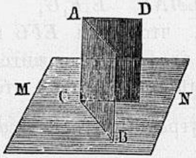
Обратная теорема. Линія AB (черт. 261), *перпендикулярная къ линіи пересѣченія QR двухъ перпендикулярныхъ плоскостей QP и MN и лежащая въ одной изъ нихъ PQ, будетъ перпендикулярна къ другой MN.*

Доказ. Проведемъ на плоскости *MN* линію *BC*, перпендикулярную къ линіи *QR*, тогда *ABC* будетъ линейный уголъ двуграннаго угла *PRQN*; а такъ какъ, по положенію, этотъ двугранный уголъ прямой, то и линейный уголъ *ABC* прямой, и потому линія *AB*, перпендикулярная къ двумъ линіямъ *QR* и *BC*, перпендикулярна къ плоскости *MN*.

Изъ предложеній этого § слѣдуетъ:

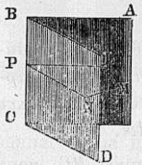
1. *Линія AB* (черт. 261), *перпендикулярная къ одной изъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостей MN, совпадаетъ съ другой плоскостью PQ, когда имѣетъ съ нею одну общую точку A*; потому что, если этотъ перпендикуляръ не лежалъ бы въ плоскости *PQ*, то изъ точки *A* можно бы было, на основаніи предъидущей теоремы, провести еще другой перпендикуляръ къ плоскости *MN*, что невозможно.

2. *Если двѣ плоскости AB и CD* (черт. 262) *перпендикулярны къ третьей плоскости MN, то и линія пересѣченія ихъ AC перпендикулярна къ этой плоскости.* Въ самомъ дѣлѣ, опустивъ изъ какой нибудь точки линіи *AC* перпендикуляръ на плоскость *MN*, найдемъ, по предъидущему, что этотъ перпендикуляръ будетъ лежать какъ въ плоскости *AB* такъ и въ плоскости *CD*; слѣдов. онъ сливается съ линіею пересѣченія двухъ плоскостей.



Черт. 262.

§ 210. **Теорема.** *Если изъ какой нибудь точки M, лежащей внутри двуграннаго угла ABCD* (черт. 263), *опустимъ перпендикуляры ML и MN на стороны его, то уголъ LMN, составленный этими перпендикулярами, вмѣстѣ съ линейнымъ угломъ двуграннаго угла, равняется двумъ прямымъ.*

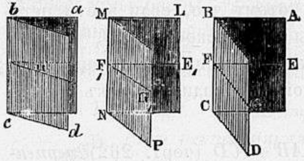


Черт. 263.

Доказ. Если чрезъ линіи ML и MN проведемъ плоскость, то эта плоскость, по § 209, будетъ перпендикулярна къ плоскости BD и къ плоскости AC, слѣд. и къ линіи ихъ пересѣченія BC (§ 209 слѣдств. 2). Изъ этого слѣдуетъ, что уголъ LPN, составленный пересѣченіями этой плоскости съ плоскостями BD и AC, есть линейный уголъ двуграннаго угла ABCD; а такъ какъ въ четыреугольникѣ PLMN углы PLM и PNM прямые, то

$$\angle LPN + \angle LMN = 2d.$$

§ 211. **Теорема.** *Двугранные углы относятся между собою какъ ихъ линейные углы.*

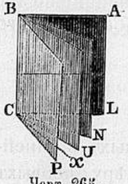


Черт. 264.

Положимъ, что EFG и $E_1F_1G_1$ (чер. 264) линейные углы двугранныхъ угловъ ABCD и LMNP; требуется доказать, что

$$\frac{ABCD}{LMNP}=\frac{EFG}{E_1F_1G_1}.$$

Доказ. Положимъ, во первыхъ, что углы EFG и $E_1F_1G_1$ соизмѣримы и что линейный уголъ *u* содержится *m* разъ въ углѣ EFG и *n* разъ въ углѣ $E_1F_1G_1$, такъ что $\frac{EFG}{E_1F_1G_1}=\frac{m}{n}$. Если вообразимъ двугранный уголъ *abcd*, соотвѣтствующій линейному углу *u*, то очевидно, что этотъ двугранный уголъ будетъ содержаться *m* разъ въ двугранномъ углѣ ABCD и *n* разъ въ двугранномъ углѣ LMNP, такъ что $\frac{ABCD}{LMNP}=\frac{m}{n}$, слѣдов. $\frac{ABCD}{LMNP}=\frac{EFG}{E_1F_1G_1}$.



Черт. 265.

Положимъ, во вторыхъ, что линейные углы LCP и LCN двугранныхъ угловъ ABCP и ABCN (черт. 265) несоизмѣримы. Докажемъ, что въ этомъ случаѣ отношеніе $\frac{ABCP}{ABCN}$ не можетъ быть ни менѣе ни болѣе отношенія $\frac{LCP}{LCN}$.

Въ самомъ дѣлѣ, если $\frac{ABCP}{ABCN}<\frac{LCP}{LCN}$, то возмемъ вмѣсто угла LCN большій уголъ LCx такъ, чтобы $\frac{ABCP}{ABCN}=\frac{LCP}{LCx}$. Раздѣлимъ уголъ LCP на такое число равныхъ частей, чтобы каждая часть была меньше угла NCx, тогда по крайней мѣрѣ одна изъ линій дѣленія будетъ содержаться между линіями CN и Cx. Пусть будетъ CU такая линія. Если чрезъ эту линію и ребро BC проведемъ плоскость BU, то составится двугранный уголъ ABCU, котораго линейный уголъ LCU соизмѣримъ съ линейнымъ угломъ LCP и потому, по предъидущему,

$$\frac{ABCP}{ABCU}=\frac{LCP}{LCU}.$$

Раздѣливъ эту пропорцію на допущенную нами пропорцію

$$\frac{ABCP}{ABCN}=\frac{LCP}{LCx},$$

находимъ пропорцію:

$$\frac{ABCN}{ABCU}=\frac{LCx}{LCU},$$

которая не вѣрна, потому что $\frac{ABCN}{ABCU}<1$, а $\frac{LCx}{LCU}>1$ Изъ этого заключаемъ, что сдѣланное нами предположеніе $\frac{ABCP}{ABCN}<\frac{LCP}{LCN}$ не справедливо.

Подобнымъ же образомъ доказывается, что предположеніе $\frac{ABCP}{ABCN} > \frac{LCP}{LCN}$ также не возможно, а изъ этого слѣдуетъ что

$$\frac{ABCP}{ABCN} = \frac{LCP}{LCN}.$$

Вслѣдствіе пропорціональности двугранныхъ и линейныхъ угловъ, послѣдніе принимаются за мѣру первыхъ и всякій двугранный уголъ обозначается числомъ градусовъ, содержащихся въ его линейномъ углѣ. При такомъ обозначеніи мы должны однако помнить, что число градусовъ, содержащихся въ линейномъ углѣ, не представляетъ величину двуграннаго угла, но есть только число ему пропорціональное. Напр. двугранный уголъ въ 36°16′ значитъ двугранный уголъ, который относится къ прямому двугранному углу, какъ 36°16′ къ 90°.

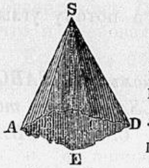
§ 212. Изъ всѣхъ направленій, которыя прямая линія можетъ имѣть въ пространствѣ, одно заслуживаетъ особеннаго вниманія, а именно направленіе принимаемое нитью, одинъ конецъ которой неподвиженъ а другой натянутъ какимъ-нибудь тяжелымъ тѣломъ. Направленіе это называется *отвѣсной* или *вертикальной линіею*.

Плоскость, перпендикулярная къ вертикальной линіи, называется *горизонтальной плоскостью* и всякая прямая, лежащая въ горизонтальной плоскости, — *горизонтальной линіею*. Поверхность воды, находящейся въ сосудѣ въ совершенномъ покоѣ, представляетъ горизонтальную плоскость.

Плоскость, проходящая чрезъ вертикальную линію, называется *вертикальной плоскостью*. Очевидно, что всякая вертикальная плоскость перпендикулярна ко всякой горизонтальной плоскости (§ 209), и что линія пересѣченія двухъ вертикальныхъ плоскостей есть вертикальная линія.

Вертикальныя линіи и горизонтальныя плоскости имѣютъ обширное приложеніе въ практикѣ, особенно въ постройкахъ разнаго рода.

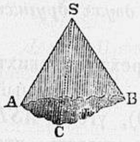
Углы многогранные.



Черт. 266.

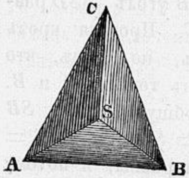
§ 213. Неопредѣленная часть пространства, содержащаяся между нѣсколькими плоскостями ASB, BSC, CSD, DSE и ESA (черт. 266), пересѣкающимися въ одной точкѣ S, называется *многограннымъ* или *тѣлеснымъ угломъ*; точка S называется *вершиною*, линіи пересѣченія плоскостей: SA, SB, SC... *ребрами* и углы ASB, BSC, CSD..., составляющіе тѣлесный уголъ, — *гранями* или *плоскими углами* многограннаго угла.

Многогранный уголъ означается или одною буквою, поставленною у вершины его, или этой буквою вмѣстѣ съ буквами, поставленными на ребрахъ; такъ напр. многогранный уголъ (черт. 266) означается или чрезъ S или чрезъ $SABCDE$.



Черт 267.

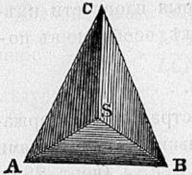
Тѣлесный уголъ S (черт. 267), составленный изъ трехъ плоскихъ угловъ ASB, BSC и CSA, называется *триграннымъ угломъ*. Очевидно, что всякій триграный уголъ имѣетъ три двугранныхъ угла $CASB$, $ABSC$ и $BCSA$; три плоскихъ и три двугранныхъ угла называются *частями* его.



Черт. 268.

§ 214. Теорема. *Во всякомъ триграниомъ углѣ, въ которомъ два двугранные угла прямые, противуположные имъ плоскіе углы также прямые.*

Положимъ, что въ триграниомъ углѣ $SABC$ (черт. 268) двугранные углы $CSAB$ и $CSBA$ прямые; требуется доказать, что плоскіе углы CSB и CSA также прямые.



Черт. 268.

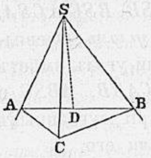
Доказ. Такъ какъ ребро SC есть пересѣченіе двухъ плоскостей CSA и CSB, по положенію, перпендикулярныхъ къ плоскости ASB, то и оно перпендикулярно къ этой плоскости (§ 209 слѣдств. 2), а потому углы CSA и CSB прямые.

Обратная теорема. Если въ тригранномъ углѣ $SABC$ (черт. 268) *два плоскіе угла его* CSB *и* CSA *прямые, то и противуположные имъ двугранные углы* $CSAB$ *и* $CSBA$ *прямые.*

Доказ. Такъ какъ, по положенію, углы CSB и CSA прямые, то линія CS перпендикулярна къ плоскости ASB, и вслѣдствіе этого плоскости CSA и CSB перпендикулярны къ плоскости ASB (§ 209).

Изъ предложеній этого § слѣдуетъ, что если въ тригранномъ углѣ всѣ двугранные углы его прямые, то и всѣ плоскіе его углы прямые, и наоборотъ.

§ 215. **Теорема.** *Въ тригранномъ углѣ каждый плоскій уголъ менѣе суммы двухъ другихъ плоскихъ угловъ.*



Черт. 269.

Положимъ, что изъ трехъ плоскихъ угловъ, составляющихъ триграннный уголъ $SABC$ (черт. 269), уголъ ASB наибольшій; требуется доказать, что $ASB < ASC + CSB$.

Доказ. Отложимъ въ плоскости ASB уголъ BSD равный углу BSC и сдѣлаемъ $SD = SC$. Проведя чрезъ точки D и C какую-нибудь плоскость, положимъ, что она пересѣчетъ ребра SA и SB въ точкахъ A и B. Триугольники CSB и DSB имѣютъ общую сторону SB и кромѣ того, по построенію, $SD = SC$ и $\angle CSB = \angle DSB$; слѣдов. эти триугольники равны, и потому

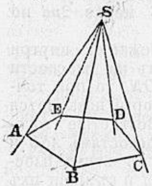
$BD = BC$, а такъ какъ $AD + DB < AC + CB$, то $AD < AC$. Замѣтимъ теперь, что триугольники ASD и ASC имѣютъ общую сторону AS и кромѣ того $SD = SC$, но $AD < AC$; изъ этого слѣдуетъ, что уголъ ASD меньше угла ASC (§ 19). Сложивъ неравенство $ASD < ASC$ съ равенствомъ $DSB = CSB$, найдемъ $ASB < ASC + CSB$, что и требовалось доказать.

Если изъ обѣихъ частей этого неравенства вычтемъ по углу ASC, то получимъ:

$$CSB > ASB - ASC,$$

т. е. *въ тригранномъ углѣ каждый изъ плоскихъ угловъ больше разности двухъ другихъ угловъ.*

§ 216. **Теорема.** *Сумма плоскихъ угловъ, составляющихъ многогранный уголъ, меньше четырехъ прямыхъ.*



Черт. 270.

Пусть будетъ $SABCDE$ (черт. 270) многогранный уголъ, составленный изъ плоскихъ угловъ ASB, BSC, CSD...; требуется доказать, что

$$ASB + BSC + CSD\ldots < 4d.$$

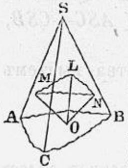
Доказ. Проведя какую-нибудь плоскость $ABCDE$, пересѣкающую ребра многограннаго угла въ точкахъ A, B, C, D и E, означимъ чрезъ S сумму плоскихъ угловъ, составляющихъ многогранный уголъ и чрезъ n число ихъ; тогда сумма угловъ триугольниковъ, вершины которыхъ сходятся въ точкѣ S, равняется $2dn$, а сумма угловъ многоугольника $ABCDE$ равняется $2dn-4d$. Но такъ какъ каждая изъ точекъ A, B, C... есть вершина триграннаго угла, то, по предъидущему §:

$$SAE + SAB > EAB;\quad SBA + SBC > ABC\ldots$$

Сложивъ эти неравенства, получимъ

$$SAE + SAB + SBA + SBC + \ldots > EAB + ABC + \ldots$$

Но первая сумма $SAE+SAB+SBA\ldots$ равна $2dn-S$ а вторая сумма $EAB+ABC+\ldots$ равна $2dn-4d$; слѣдов. $2dn-S>2dn-4d$ или $2dn+4d>2dn+S$; а отсюда $S<4d$.



Черт. 271.

§ 217. Теорема. *Во всякомъ тригранномъ углѣ* $SABC$ (чер. 271) *сумма двугранныхъ угловъ менѣе* $6d$ *и болѣе* $2d$.

Доказ. Опустивъ изъ какой нибудь точки O, лежащей внутри триграннаго угла, перпендикуляры OL, OM и ON на стороны его ASB ASC и BSC, получимъ при O тригранный уголъ $OLMN$, котораго плоскіе углы MOL, LON и NOM, по § 210, служатъ дополненіями до $2d$ двуграннымъ угламъ $CSAB$, $CSBA$ и $ASCB$; слѣдов. сумма этихъ плоскихъ и двугранныхъ угловъ равна $6d$, но сумма плоскихъ угловъ менѣе $4d$ (§ 216), слѣд. сумма двугранныхъ угловъ менѣе $6d$ и болѣе $2d$.

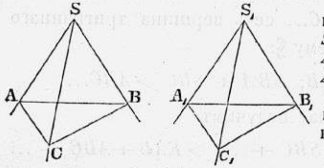
Повторяя подобное же разсужденіе относительно какого нибудь многограннаго угла, составленнаго изъ n плоскихъ угловъ, найдемъ, что сумма его двугранныхъ угловъ менѣе $2nd$ но болѣе $2nd-4d$.

§ 218. Если изъ какой нибудь точки O, лежащей внутри триграннаго угла $SABC$, (черт. 271) опустимъ на плоскости ASB, ASC и CSB перпендикуляры OL, OM и ON, то при точкѣ O образуется тригранный уголъ $OLMN$, который называется *дополнительнымъ угломъ* триграннному углу S. Вслѣдствіе того, что линіи OL и OM перпендикулярны къ плоскостямъ ASB и ASC, плоскость LOM также перпендикулярна къ этимъ плоскостямъ (§ 209), и потому она перпендикулярна и къ линіи ихъ пересѣченія AB (§ 209 слѣдст. 2); слѣдов. ребра триграннаго угла S соотвѣтственно перпендикулярны къ плоскостямъ триграннаго угла O.

Изъ этого мы заключаемъ, что если тригранный уголъ O есть уголъ дополнительный для триграннаго угла S, то и наоборотъ, тригранный уголъ S есть уголъ дополнительный для триграннаго угла O.

Равенство и симетрія тригранныхъ угловъ.

§ 219. Теорема *Когда два тригранныхъ угла имѣютъ плоскіе углы соотвѣтственно равные, то и двугранные ихъ улы равны.*



Черт. 272.

Положимъ, что въ тригранныхъ углахъ $SABC$ и $S_1A_1B_1C_1$ (черт. 272) $\angle ASB=\angle A_1S_1B_1$; $\angle ASC=\angle A_1S_1C_1$; $\angle BSC=\angle B_1S_1C_1$; требуется доказать, что двугранные углы соотвѣтствено равны между собою.

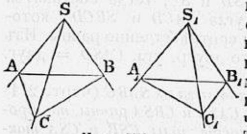
Доказ. Сдѣлаемъ $SA=S_1A_1$ и проведемъ чрезъ точки A и A_1 плоскости CAB и $C_1A_1B_1$ перпендикулярныя къ ребрамъ SA и S_1A_1, тогда $\angle CAB$ и $\angle C_1A_1B_1$ будутъ линейные углы двугранныхъ $CSAB$ и $C_1S_1A_1B_1$. Прямоугольные триугольники BSA $B_1S_1A_1$, въ которыхъ $SA=S_1A_1$ и $\angle ASB=\angle A_1S_1B_1$, равны; прямоугольные триугольники ASC и $A_1S_1C_1$, въ которыхъ $SA=S_1A_1$ и $\angle ASC=\angle A_1S_1C_1$, также равны; слѣдов. $SB=S_1B_1$ и $SC=S_1C_1$. Вслѣдствіе этого триугольники BSC и $B_1S_1C_1$, имѣющіе двѣ стороны и уголъ между ними равные, будутъ равны. Изъ сказаннаго мы заключаемъ, что $AB=A_1B_1$; $AC=A_1C_1$ и $BC=B_1C_1$; слѣдов. триугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны между собою, и потому $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$. Но такъ какъ BAC и $B_1A_1C_1$ суть линейные углы двугранныхъ $CSAB$ и $C_1S_1A_1B_1$, то эти двугранные углы равны между собою

Подобнымъ же образомъ доказывается равенство и другихъ двугранныхъ угловъ.

Когда ребра SB и SC перпендикулярны къ ребру AS, т. е. когда два плоскіе угла ASB и ASC прямые, то плоскость CAB будетъ параллельна линіямъ SB и SC; къ этому случаю доказательство, выше приведенное, не прилагается, потому что плоскость, проведенная чрезъ точку A перпендикулярно къ ребру SA, не пересѣчется съ линіями SB и SC; но такъ какъ въ этомъ случаѣ плоскіе углы BSC и $B_1S_1C_1$ суть линейные углы двугранныхъ $CSAB$ и $C_1S_1A_1B_1$, то равенство этихъ двугранныхъ угловъ слѣдуетъ прямо изъ равенства ихъ линейныхъ угловъ.

§ 220. Теорема. *Два тригранныхъ угла* $SABC$ и $S_1A_1B_1C_1$ (черт. 272) *равны, когда плоскіе ихъ углы равны и одинаково расположены.*

Доказ. Изъ равенства плоскихъ угловъ слѣдуетъ, по предъидущему §, что двугранные углы равны, и тригранные углы $SABC$ и $S_1A_1B_1C_1$ при наложеніи очевидно совпадутъ.



Черт. 273.

Если тригранные углы $SABC$ и $S_1A_1B_1C_1$ (черт. 273) составлены изъ плоскихъ угловъ соотвѣтственно равныхъ, но расположенныхъ въ обратномъ порядкѣ, то двугранные ихъ углы, по предъидущему §, также соотвѣтственно равны; но тригранные углы въ этомъ случаѣ не могутъ быть совмѣщаемы. Тригранные углы, которые составлены изъ равныхъ плоскихъ и двугранныхъ угловъ, т. е. которые имѣютъ всѣ части соотвѣтственно равныя, но не могутъ быть совмѣщаемы, называются *симетричными.*

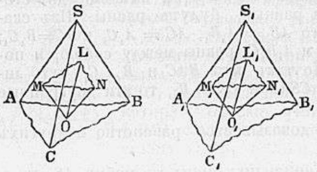
§ 221. Теорема. *Два тригранныхъ угла равны, когда имѣютъ по равному двугранному углу, заключенному между двумя соотвѣтственно равными и одинаково расположенными плоскими углами.*

Доказ. Очевидно, что такіе тригранные углы при наложеніи совмѣщаются.

§ 222. **Теорема.** *Два трігранныхъ угла равны, когда имѣютъ по равному плоскому углу, заключенному между двумя соотвѣтственно равными и одинаково расположенными двугранными углами.*

Доказ. Очевидно, что такіе трігранные углы при наложеніи совмѣщаются.

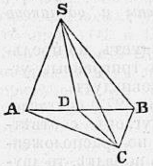
§ 223. *Два трігранныхъ угла $SABC$ и $S_1A_1B_1C_1$* (черт. 274) *равны, когда двугранные ихъ углы соотвѣтственно равны и одинаково расположены.*



Черт. 274.

Доказ. Пусть будутъ $OLMN$ и $O_1L_1M_1N_1$ дополнительные углы трігранныхъ S и S_1. Такъ какъ двугранные углы трігранныхъ S и S_1, по положенію, соотвѣтственно равны, то плоскіе углы трігранныхъ угловъ O и O_1 также равны и потому самые трігранные углы O и O_1 равны между собою (§ 220). Изъ равенства этихъ трігранныхъ угловъ слѣдуетъ равенство ихъ двугранныхъ; слѣдов. плоскіе углы трігранныхъ угловъ S и S_1 равны, потому что эти трігранные углы суть углы дополнительные для трігранныхъ угловъ O и O_1, а изъ этого слѣдуетъ, что трігранные углы S и S_1 равны § 220).

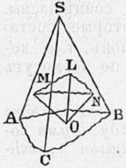
§ 224. **Теорема.** *Если въ трігранномъ углѣ $SABC$* (черт. 275) *два плоскихъ угла ASC и CSB равны, то противуположные имъ двугранные углы $CBSA$ и $CASB$ также равны.*



Черт. 275.

Доказ. Проведя въ плоскости ASB линію SD, раздѣляющую плоскій уголъ ASB по поламъ, вообразимъ плоскость DSC, проходящую чрезъ линіи SD и SC, тогда составятся два трігранныхъ угла $SACD$ и $SBCD$, которыхъ плоскіе углы соотвѣтственно равны. Изъ этого слѣдуетъ, что двугр. угл. $CASD$ = двуг. угл. $CBSD$ (§ 219).

Обратная теорема. Если въ трігранномъ углѣ $SABC$ (черт. 271) *два двугранныхъ угла $CASB$ и $CBSA$ равны, то противуположные имъ плоскіе углы CSB и CSA также равны.*

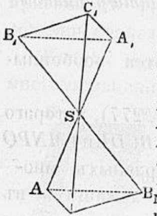


Черт. 271.

Доказ. Если вообразимъ дополнительный уголъ $OLMN$, то, вслѣдствіе предположеннаго равенства двугранныхъ угловъ $CASB$ и $CBSA$, плоскіе углы LOM и LON трîграннаго угла O равны; слѣдов., по предъидущей теоремѣ, и противуположные имъ двугранные $LONM$ и $LOMN$ равны; а такъ какъ углы S и O суть взаимно дополнительные, то изъ равенства этихъ двугранныхъ угловъ слѣдуетъ равенство плоскихъ угловъ ASC и BSC.

Очевидно, что если всѣ плоскіе углы трігранного равны между собою, то и двугранные углы его равны, и наоборотъ.

§ 225. Если продолжимъ ребра трігранного угла $SABC$ (черт. 276), то плоскостями A_1SB_1, B_1SC_1 и C_1SA_1 образуется новый трігранный уголъ $SA_1B_1C_1$, который называется *вертикальнымъ угломъ* перваго.



Черт. 276.

Такъ какъ вертикальные трігранные углы имѣютъ соотвѣтственно равные плоскіе углы: $\angle ASB = \angle A_1SB_1$; $\angle BSC = \angle B_1SC_1$ и $\angle ASC = \angle A_1SC_1$, то, по § 219, и двугранные ихъ углы равны. Но вертикальные трігранные углы, имѣя всѣ части соотвѣтственно равныя, не могутъ быть совмѣщаемы; слѣдов. эти углы всегда симметричные.

ГЛАВА III.

О многогранникахъ.

Призмы, параллелепипеды и пирамиды. Равенство призмъ и пирамидъ. Симметричные многогранники. Правильные многогранники. Подобіе многогранниковъ.

Призмы, параллелепипеды и пирамиды.

§ 226. Часть пространства, ограниченная со всѣхъ сторонъ многоугольниками, называется *многогранникомъ*. Самые многоугольники называются *сторонами*, стороны многоугольниковъ — *ребрами*, вершины многоугольниковъ — *вершинами* многогранника.

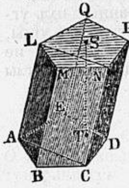
Сумма сторонъ многогранника называется *поверхностью* его.

Очевидно, что простѣйшій изъ всѣхъ многогранниковъ есть многогранникъ о четырехъ сторонахъ, потому что три плоскости не могутъ ограничить пространство.

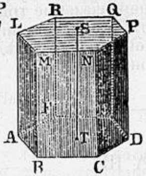
Многогранникъ, ограниченный четырьмясторонами, называется *четырегранникомъ* или *тетраедромъ*, многогранникъ о шести сторонахъ—*шестигранникомъ* или *эксаедромъ*, о восми сторонахъ—*осмигранникомъ* или *октаедромъ*, о двѣнадцати сторонахъ — *двѣнадцатигранникомъ* или *додекаедромъ*, о двадцати сторонахъ—*двадцатигранникомъ* или *икосаедромъ*.

Другіе многогранники рѣдко означаются особенными названіями.

§ 227. Мног—къ **ABCDELMNPQ** (чер. 277), котораго двѣ стороны **ABCDE** и **LMNPQ** суть два равныхъ многоугольника, лежащихъ въ параллельныхъ плоскостяхъ, а другія стороны **ABML**, **BCNM**…, — параллелограммы, называется *призмою*.



Черт. 277



Черт. 278.

Параллельные многоугольники **ABCDE** и **LMNPQ** называются *основаніями* призмы, а разстояніе между ними, т. е. перпендикуляръ **ST**, опущенный изъ какой-нибудь точки одного основанія на другое — *высотою*.

Очевидно, что боковыя ребра призмы параллельны и, такъ какъ они заключаются между параллельными плоскостями, равны между собою.

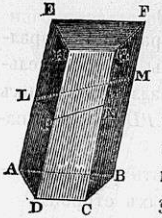
Смотря потому будутъ ли основанія призмы треугольникъ, четыреугольникъ или какой-нибудь многоугольникъ, призма называется *треугольною*, *четыреугольную* или *многоугольною*.

Плоскость **ACNL** (черт. 277), проходящая чрезъ два боковыхъ ребра не смежныхъ между собою, называется *діагональною плоскостью*. Очевидно, что діагональныя плоскости, проведенныя чрезъ одно и то же ребро, раздѣляютъ всякую призму на треугольныя призмы, имѣющія одинакую высоту.

Призма называется *наклонною* (черт. 277), когда боковыя ребра не перпендикулярны къ основаніямъ, и—*прямою* (черт. 278), когда они перпендикулярны къ нимъ.

Очевидно, что боковыя стороны прямой призмы **ADLP** (черт. 278) суть прямоугольники и что прямыя призмы съ равными основаніями и высотами при наложеніи совпадаютъ.

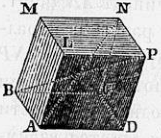
Прямая призма, которой основанія правильные многоугольники, называется *правильною*; линія, соединяющая центры двухъ основаній, называется *осью* призмы.



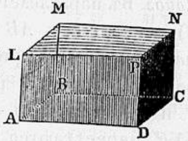
Черт. 279.

Когда призму **DF** (черт. 279) пересѣчемъ плоскостью **LMNP** не параллельною основанію, то получимъ многогранникъ **ADCB LPNM**, который называется *усѣченною призмою*.

§ 228. Призма **ABCDLMNP** (чер. 280), которой основанія **ABCD** и **LMNP** суть параллелограммы называется *параллелепипедомъ*. Линія **BP**, соединяющая вершины двухъ противуположныхъ тригранныхъ угловъ, называется *діагональю* параллелепипеда. Прямой параллелепипедъ **ABCDLMNP** (черт. 281), котораго основанія прямоугольники, называется *прямоугольнымъ параллелепипедомъ*; три ребра его **AB**, **AD** и **AL**, идущія изъ одной вершины называется *измѣреніями* его. Очевидно, что всѣ стороны прямоугольнаго параллелепипеда прямоугольники.



Черт. 280.

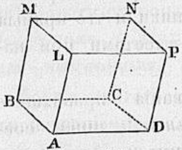


Черт. 281.

Прямоугольный параллелепипедъ, котораго всѣ три измѣренія равны, называется *кубомъ*. Очевидно, что всѣ стороны куба суть равные квадраты.

Параллелепипедъ, котораго всѣ стороны ромбы, называется *ромбоедромъ*.

§ 229. Теорема. *Во всякомъ параллелепипедѣ противуположныя стороны равны и параллельны.*



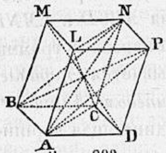
Черт. 282.

Положимъ, что *AN* (черт. 282) параллелепипедъ; требуется доказать, что параллелограммы *ALPD* и *BMNC* равны и параллельны.

Доказ. Такъ какъ ребра *LP* и *MN* равны и параллельны, а ребра *LA* и *MB* также равны и параллельны, углы же *ALP* и *BMN*, вслѣдствіе параллельности ихъ сторонъ, равны, то параллелограммъ *ALPD* равенъ и параллеленъ параллелограмму *BMNC*.

Подобнымъ же образомъ можно доказать равенство и параллельность другихъ противуположныхъ сторонъ.

§ 230. Теорема. *Діагонали всякаго параллелепипеда взаимно пересѣкаются и дѣлятся пополамъ.*

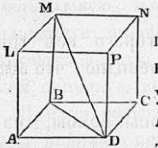


Черт. 283

Доказ. Въ параллелепипедѣ *AN* (черт. 283) ребра *NP* и *AB* равны и параллельны; слѣдов. четыреугольникъ *ABNP* параллелограммъ, а потому діагонали *AN* и *BP* лежатъ въ одной плоскости *ABNP*, пересѣкаются и дѣлятся взаимно пополамъ.

Подобнымъ же образомъ доказывается, что каждая пара четырехъ діагоналей параллелепипеда: *LC*, *MD*, *AN* и *BP* пересѣкается и дѣлится пополамъ.

Очевидно, что всѣ четыре діагонали параллелепипеда пересѣкаются въ одной точкѣ.



Черт. 284.

Если въ прямоугольномъ параллелепипедѣ *AN* (черт. 284) проведемъ діагональ *MD* и линію *BD*, то изъ прямоугольнаго треугольника *MDB* найдемъ: $MD^2 = BM^2 + BD^2$, а изъ прямоугольнаго треугольника *BAD* получимъ:

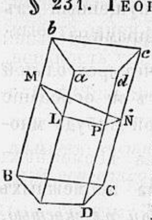
$BD^2 = BA^2 + AD^2 = BA^2 + BC^2$; вставляя, находимъ

$$MD^2 = BM^2 + BC^2 + BA^2,$$

т. е. *квадратъ діагонали прямоугольнаго параллелепипеда равняется суммѣ квадратовъ трехъ его измѣреній.*

Изъ этого слѣдуетъ, что четыре діогонали прямоугольнаго параллелепипеда равны между собою.

§ 231. Теорема. *Боковая поверхность всякой призмы равняется боковому ребру ея, умноженному на периметръ перпендикулярнаго сѣченія.*



Черт. 285.

Пусть будетъ *ABCDabcd* (черт. 285) какая нибудь призма и *LMNP* сѣченіе перпендикулярное къ боковымъ ея ребрамъ; требуется доказать, что боковая поверхность призмы равняется:

$$(LM + MN + NP + PL) . Aa.$$

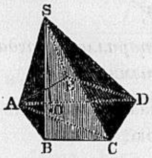
Доказ. Замѣтивъ, что площади параллелограммовъ *Ad*, *Dc*, *Cb* и *Ba* равны $Aa . LP$, $Dd . PN$, $Cc . NM$ и $Bb . ML$, и что боковыя ребра призмы равны между собою, найдемъ, что боковая поверхность призмы равна

$$(LM + MN + NP + PL) . \ Aa.$$

Изъ этого предложенія слѣдуетъ:

1. Боковая поверхность прямой призмы равняется высотѣ ея умноженной на периметръ основанія.

2. Если означимъ чрезъ a высоту прямоугольнаго параллелепипеда и чрезъ b и c стороны его основанія такъ, что линіи a, b и c представятъ три измѣренія параллелепипеда, то боковая поверхность его будетъ равна $(2b + 2c)a$. Сумма площадей обоихъ основаній равняется $2bc$, слѣдов. вся поверхность параллелепипеда равняется $2(ab + ac + bc)$.

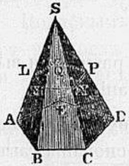


Черт. 286.

§ 232. Многогранникъ $SABCDE$ (черт. 286), котораго одна сторона $ABCDE$ какой-нибудь многоугольникъ, а другія стороны ASB, BSC,... треугольники, сходящіеся въ одной общей точкѣ S, называется *пирамидою*. Многоугольникъ $ABCDE$ называется *основаніемъ*, точка S — *вершиною*, а перпендикуляръ SO, опущенный изъ вершины S на основаніе, — *высотою* пирамиды.

Пирамида называется треугольной, четыреугольной или многоугольной, смотря потому будетъ ли основаніе треугольникъ, четыреугольникъ или какой нибудь многоугольникъ.

Плоскость ASC, проходящая чрезъ два несмежныхъ ребра SA и SC, называется *діагональной плоскостью*. Очевидно, что всякая пирамида $SABCDE$ можетъ быть раздѣлена на треугольныя пирамиды $SABC$, $SACD$, $SADE$, діагональными плоскостями ASC и ASD, проходящими чрезъ одно и то же ребро SA.



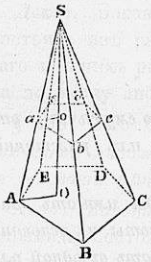
Черт. 287.

Когда основаніе пирамиды есть правильный многоугольникъ и центръ его совпадаетъ съ основаніемъ высоты (черт. 287), то пирамида называется *правильною*; высота въ этомъ случаѣ, называется также *осью* пирамиды. Очевидно, что треугольники ASB, BSC.., образующіе правильную пирамиду, равны между собою, потому что стороны основанія равны, и ребра пирамиды, какъ наклонныя равно отстоящія отъ оси пирамиды, также равны. Высота одного изъ этихъ треугольниковъ, т. е. перпендикуляръ, опущенный изъ вершины пирамиды на какую нибудь сторону основанія, называется *апоѳемою* пирамиды.

Если пересѣчемъ пирамиду $SABCDE$ (черт. 287) плоскостью $LMNPQ$ параллельной основанію, то получимъ многогранникъ $ABCDELMNPQ$, который называется *усѣченной пирамидою*. Сѣченіе $LMNPQ$ называется *верхнимъ основаніемъ*, а разстояніе его отъ нижняго основанія $ABCDE$ — *высотою*.

Когда пирамида $SABDCE$ правильная, то и усѣченная пирамида называется *правильною*, и въ этомъ случаѣ высота одной изъ трапецій, составляющихъ боковую поверхность усѣченной пирамиды, называется ея *апоѳемою*.

§ 233. Теорема. *Плоскость, параллельная основанію пирамиды, раздѣляетъ ребра и высоту ея на пропорціональныя части и даетъ въ сѣченіи многоугольникъ, подобный основанію.*



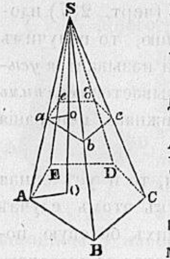
Черт. 288.

Положимъ, что $SABCDE$ (черт. 288) какая нибудь пирамида, SO высота ея и $abcde$ сѣченіе параллельное основанію; требуется доказать, что $\frac{SA}{Sa}=\frac{SB}{Sb}=\frac{SC}{Sc}....=\frac{SO}{So}$, и что многоугольники $ABCDE$ и $abcde$ подобны между собою.

Доказ. Проведемъ плоскость чрезъ ребро SA и высоту SO и пусть будутъ AO и ao линіи пересѣченія ея съ плоскостями $ADCDE$ и $abcde$. По § 202 слѣдст. 1, линіи AB, BC, CD, DE, EA и AO соотвѣтственно параллельны линіямъ ab, bc, cd, de, ea и ao; слѣдов.

$$\frac{SA}{Sa}=\frac{SB}{Sb}=\frac{SC}{Sc}=\frac{SD}{Sd}=\frac{SE}{Se}=\frac{SO}{So}.$$

Такъ какъ стороны многоугольниковъ $ABCDE$ и $abcde$ соотвѣтственно параллельны, то углы ихъ рав-



Черт. 288.

ны Далѣе, изъ подобія треугольниковъ ASB и aSb слѣдуетъ: $\frac{AS}{aS}=\frac{AB}{ab}$, а изъ подобія треугольниковъ ASE и aSe: $\frac{AS}{aS}=\frac{AE}{ae}$; слѣдов. $\frac{AB}{ab}=\frac{AE}{ae}$.

Подобнымъ же образомъ доказывается пропорціональность и другихъ сторонъ многоугольниковъ $ABCDE$ и $abcde$.

Такъ какъ площади подобныхъ многоугольниковъ относятся какъ квадраты сходственныхъ сторонъ, то

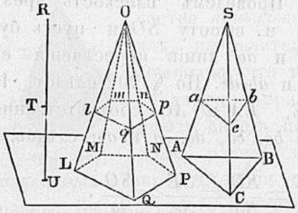
$$\frac{ABCDE}{abcde}=\frac{AB^2}{ab^2};$$

но $\frac{AB}{ab}=\frac{SA}{Sa}=\frac{SO}{So}$, слѣдов.

$$\frac{ABCDE}{abcde}=\frac{SO^2}{So^2},$$

т. е. *площади основанія и параллельнаго ему сѣченія относятся между собою, какъ квадраты ихъ разстояній отъ вершины пирамиды.*

§ 234. Теорема. *Если двѣ пирамиды имѣютъ равныя высоты и основанія ихъ лежатъ въ одной плоскости, то площади, происходящія отъ пересѣченія плоскостью параллельной основаніямъ, будутъ пропорціональны площадямъ основаній.*



Черт. 289.

Пусть будутъ $SABC$ и $OLMNPQ$ (черт. 289) двѣ пирамиды, которыя имѣютъ одинакую высоту RU, а основанія которыхъ ABC и $LMNPQ$

лежатъ въ одной плоскости и положимъ, что abc и $lmnpq$ сѣченія, образуемыя плоскостью параллельной основаніямъ; требуется доказать, что $\frac{ABC}{abc}=\frac{LMNPQ}{lmnpq}$.

Доказ. Положимъ, что плоскость сѣченія встрѣчаетъ линію RU въ точкѣ T; тогда по предъидущему §:

$$\frac{ABC}{abc}=\frac{RU^2}{RT^2} \text{ и } \frac{LMNPQ}{lmnpq}=\frac{RU^3}{RT^3}; \text{ слѣдов. } \frac{ABC}{abc}=\frac{LMNPQ}{lmnpq}.$$

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что если основанія ABC и $LMNPQ$ равновелики, то сѣченія abc и $lmnpq$ также равновелики.

§ 235. Теорема. *Боковая поверхность правильной пирамиды равняется периметру основанія умноженному на половину апоѳемы.*

Доказ. Боковая поверхность правильной пирамиды состоитъ изъ равныхъ треугольниковъ, а площадь каждаго изъ нихъ равняется сторонѣ основанія, умноженной на половину апоѳемы.

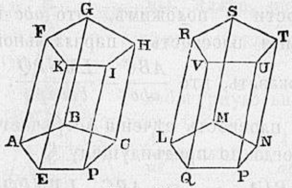
§ 236. Теорема. *Боковая поверхность правильной усѣченной пирамиды равняется полусуммѣ периметровъ ея основаній умноженной на апоѳему.*

Доказ. Боковая поверхность правильной усѣченной пирамиды состоитъ изъ равныхъ трапецій, а площадь каждой изъ нихъ равняется полусуммѣ параллельныхъ сторонъ умноженной на высоту трапеціи.

Очевидно, что боковую поверхность правильной усѣченной пирамиды можно выразить также *произведеніемъ периметра сѣченія, раздѣляющаго боковыя ребра пополамъ, на апоѳему.*

Равенство призмъ и пирамидъ.

§ 237. Теорема. *Двѣ призмы равны, когда имѣютъ равныя основанія, по равному трегранному углу и по равной боковой сторонѣ этого угла.*



Черт. 290.

Положимъ, что въ призмахъ AH и LT (черт. 290) триграные углы A и L равны и что кромѣ того $ABCDE = LMNPQ$; и $AEKF = LQVR$; требуется доказать, что эти призмы равны.

Доказ. Вложимъ призму LT въ призму AH такъ, чтобы основанія и триграные углы A и L совмѣстились, тогда ребра LR и LM совмѣстятся съ ребрами AF и AB и параллелограммъ LS совпадетъ съ параллелограммомъ AG, слѣдов. ребро MS—съ ребромъ BG.

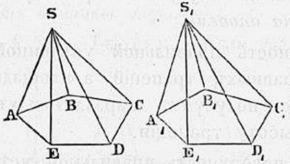
Подобнымъ же образомъ доказывается, что и другія ребра совмѣстятся.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ:

1. *Двѣ призмы равны, когда имѣютъ равныя основанія и по двѣ смежныя стороны соотвѣтственно равныя и одинаково расположенныя*, потому что въ этомъ случаѣ триграные углы, заключенные между этими сторонами, равны (§ 220).

2. *Двѣ призмы равны, когда имѣютъ равныя основанія, по равной и одинаково расположенной сторонѣ и по равному двугранному углу, заключенному между ними*, потому что въ этомъ случаѣ и триграные углы, соотвѣтствующіе этимъ сторонамъ и двугранному углу, равны (§ 221

§ 238. Теорема. *Двѣ пирамиды равны, когда имѣютъ равныя основанія, по равной и одинаково расположенной сторонѣ и по равному двугранному углу, заключенному между ними.*



Черт. 291.

Положимъ что въ пирамидахъ $SABCDE$ и $S_1A_1B_1C_1D_1E_1$ (черт. 291) $ABCDE = A_1B_1C_1D_1E_1$; $ASE = A_1S_1E_1$ и двугр. угл. $SAED =$ двуг. угл $S_1A_1E_1D_1$; требуется доказать, что эти пирамиды равны.

Доказ. Вложимъ пирамиду $S_1A_1B_1C_1D_1E_1$ въ пирамиду $SABCDE$ такъ, чтобы основанія и равныя стороны ASE и $A_1S_1E_1$ совпали, тогда ребра E_1S_1 и E_1D_1 совмѣстятся съ ребрами ES и ED, и треугольникъ $E_1S_1D_1$ совпадетъ съ треугольникомъ ESD. Подобнымъ же образомъ доказывается, что и другія стороны совпадутъ.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ:

1. *Двѣ пирамиды равны, когда имѣютъ равныя основанія и по двѣ смежныя стороны равныя и одинаково расположенныя*, потому что въ этомъ случаѣ и двугранные углы, заключенные между основаніемъ и этими сторонами, равны (§ 220).

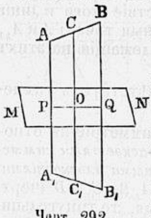
2. *Двѣ треугольныя пирамиды равны, когда имѣютъ по три стороны соотвѣтственно равныя и одинаково расположенныя.*

3. *Двѣ треугольныя пирамиды равны, когда имѣютъ по равному двугранному углу, заключенному между двумя соотвѣтственно равными и одинаково расположенными сторонами.*

§ 239. Если чрезъ какую нибудь вершину многогранника проведемъ плоскости, проходящія чрезъ всѣ его ребра, то многогранникъ раздѣлится на рядъ пирамидъ, которыя будутъ имѣть общую вершину и для которыхъ стороны многогранника будутъ служить основаніями. Такъ какъ всякая пирамида можетъ быть раздѣлена діагональными плоскостями на треугольныя пирамиды, то и всякій многогранникъ раздѣлится на рядъ треугольныхъ пирамидъ.

Когда два многогранника равны, то они, очевидно, могутъ быть раздѣлены на одинакое число соотвѣтственно равныхъ и одинаково расположенныхъ треугольныхъ пирамидъ. Наоборотъ , когда два многогранника раздѣляются на одинакое число соотвѣтственно равныхъ и одинаково расположенныхъ треугольнихъ пирамидъ, то такіе многогранники равны между собою, потому что они при вложеніи однаго въ другой совмѣстятся.

Симметричные многогранники.



Черт. 292.

§ 240. Двѣ точки A и A_1 (черт. 292) называются симметричными относительно плоскости MN, когда линія AA_1, соединяющая ихъ, перпендикулярна къ этой плоскости и дѣлится ею пополамъ.

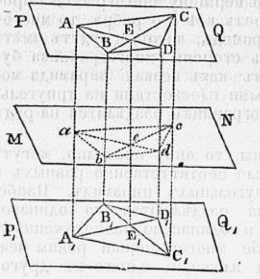
Теорема. Если двѣ точки A и B (черт 292). *прямой AB симметричны относительно плоскости MN двумъ точкамъ A_1 и B_1 другой прямой A_1B_1, то всякая точка C первой прямой имѣетъ симметричную точку на второй прямой.*

Доказ. Соединимъ точки A и B съ точками A_1 и B_1 и положимъ, что плоскость, проходящая чрезъ линіи AA_1 и BB_1, пересѣчетъ плоскость MN по линіи PQ Если изъ точки C опустимъ перпендикуляръ на плоскость MN, то этотъ перпендикуляръ очевидно лежитъ въ плоскости AB_1, потому что плоскость AB_1 перпендикулярна къ плоскости MN Положимъ, что этотъ перпендикуляръ пересѣчетъ линію PQ въ точкѣ O и продолженіе его пересѣчетъ линію A_1B_1 въ точкѣ C_1. Такъ какъ четыреугольники $APQB$ и A_1PQB_1 при наложеніи совпадаютъ, то изъ этого слѣдуетъ, что $CO = C_1O_1$ т. е. что C и C_1 точки симметричныя.

И такъ всякой точкѣ прямой AB соотвѣтствуетъ симметричная точка на прямой A_1B_1.

Двѣ прямыя, которыхъ точки взаимно симметричны относительно нѣкоторой плоскости, называются *линіями симметрично* *расположенными* или просто *симметричными линіями*. Изъ равенства двухъ четыреугольниковъ $APQB$ и A_1PQB_1 слѣдуетъ, что $AB = A_1B_1$; это значитъ, что *разстояніе двухъ какихъ нибудь точекъ равняется разстоянію ихъ симметричныхъ точекъ.*

§ 241 Теорема. *Если три точки A, B и C* (черт. 293) *лежащія на плоскости PQ, симметричны относительно плоскости MN тремъ точкамъ A_1 B_1 и C_1, лежащимъ на другой плоскости P_1Q_{11} то всякая точка D первой плоскости имѣетъ симметричную точку на второй плоскости.*



Черт. 293.

Доказ. Опустимъ изъ точки D перпендикуляръ на MN и положимъ, что продолженіе его пересѣчетъ плоскость P_1Q_1 въ точкѣ D_1. Плоскость, проведенная чрезъ линіи AA_1 и DD_{11} перпендикулярнакъ плоскости MN, равно какъ плоскость, проходящая чрезъ линіи BB_1 и CC_1; слѣдов. линія пересѣченія EE_1 этихъ двухъ плоскостей также перпендикулярна къ MN (§ 209 слѣдст. 2). Но такъ какъ линіи BC и B_1C_1 имѣютъ по двѣ симметричня точки B и B_{11} C и C_1, то эти линіи, по предъидущему §, симметричныя, и потому $Ee = E_1e$. Вслѣдствіе этого и линіи AE и A_1E_{11} имѣющія также по двѣ симметричныя точки: A и A_{1}, E и E_{11} симметричны, и потому точки D и D_{11} лежащія на этихъ линіяхъ, будутъ симметричными точками.

И такъ всякой точкѣ плоскости PQ соотвѣтствуетъ симметричная точка на плоскости P_1Q_1.

Двѣ плоскости, которыхъ точки взаимно симметричны относительно нѣкоторой плоскости, называются *плоскостями симметрично расположенными* или просто *симметричными плоскостями.*

§ 242. Если соединимъ между собою точки A, B, C и D (черт. 293) также точки A_{11} B_{11} C_1 и D_1 имъ симетричныя, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, имѣющіе три соотвѣтственно равныя стороны, равны; также равны и треугольники BCD и $B_1C_1D_1$; слѣдов. и четыреугольники $ABDC$ и $A_1B_1D_1C_1$ равны между собою.

Подобнымъ же образомъ доказывается, что вообще многоугольники, которыхъ вершины суть взаимно симметричныя точки, равны между собою, потому что такіе многоугольники состоятъ изъ равныхъ треугольниковъ.

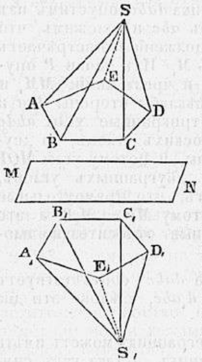
Многоугольники, которыхъ вершины точки взаимно симметричныя относительно нѣкоторой плоскости, называются *многоугольниками симметрично расположенными*, или просто *симметричными многоугольниками.*

Очевидно, что симметричные многоугольники лежатъ въ симетричныхъ плоскостяхъ.

§ 243. Многогранники, которыхъ вершины суть точки взаимно симметричныя относительно нѣкоторой плоскости, называются *симметричными многогранниками*, а плоскость, относительно которой они симметрично расположены — *плоскостью симметріи.*

Очевидно, что всѣ стороны двухъ симметричныхъ многогранниковъ будутъ многоугольники соотвѣтственно симметричные, слѣдов. и соотвѣтственно равные (§ 241), и что всякой точкѣ, взятой на поверхности однаго многогранника, соотвѣтствуетъ всегда симметричная точка на поверхности другаго.

Вслѣдствіе равенства сторонъ тѣлесные углы двухъ симметричныхъ многогранниковъ будутъ составлены изъ плоскихъ угловъ соотвѣтственно равныхъ.

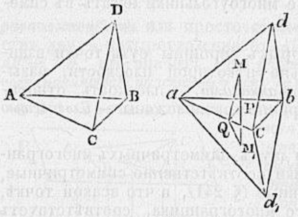


Черт. 294.

Пусть будутъ S и S_1 (черт. 294) симметричныя вершины двухъ симметричныхъ многогранниковъ, MN плоскость симметріи и положимъ, что $SABCDE$ и $S_1A_1B_1C_1D_1E_1$ тѣлесные углы этихъ многогранниковъ при точкахъ S и S_1 и что точки A_{11} B_{11} C_1, D_{11} E_1 симметричны точкамъ A, B, C, D, E. Если вообразимъ плоскость чрезъ линіи SA и SC, также плоскость чрезъ линіи S_1A_1 и S_1C_{11} то, по предъидущему, треугольники ASB, ASC и CSB будутъ соотвѣтственно симметричны и равны треугольникамъ $A_1S_1B_{11}$ $A_1S_1C_1$ и $C_1S_1B_{11}$ такъ что триграные углы $SABC$ и $S_1A_1B_1C_1$ будутъ составлены изъ соотвѣтственно равныхъ плоскихъ угловъ, и потому, по § 219, двугр. угл. $SABC =$ двуг. угл. $S_1A_1B_1C_1$. Изъ этого мы заключаемъ, что *въ симметричныхъ многогранникахъ двугранные углы соотвѣтственно равны.*

§ 244. Если два симметричныхъ многогранника раздѣлимъ плоскостями, проведенными чрезъ двѣ симметричныя вершины, на четырегранники, то эти четыгранники по парно симметричны, потому что ихъ вершины взаимно симметричныя точки. Слѣдов. два симметричныхъ многогранника могутъ быть всегда раздѣлены на одинакое число симметричныхъ четырегранниковъ; наоборотъ, когда два многогранника раздѣляются на одинакое число по парно симметричныхъ четырегранниковъ, то такіе многогранники симметричны.

§ 245. Теорема. *Два четырегранника, которыхъ стороны соотвѣтственно равны, будутъ или равны или симметричны.*



Черт. 295.

Доказ. Пусть будетъ $DABC$ (чер. 295) какой нибудь четырегранникъ и положимъ, что треугольникъ abc равенъ треугольнику ABC. На треугольникѣ abc можно построить только два четырегранника, имѣющихъ стороны соотвѣтственно равныя сторонамъ четырегранника $DABC$, а именно четырегранники $dabc$ и d_1abc. Но четырегранники $DABC$ и $dabc$, по § 238 слѣдст. 2, равны между собою. Что касается до четырегранниковъ $dabc$ и d_1abc, то не трудно удостовѣриться, что они симметричны относительно плоскости abc. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ M какая нибудь точка на поверхности четырегранника $dabc$; опустимъ изъ этой точки перпендикуляръ на плоскость abc и положимъ, что онъ встрѣчаетъ эту плоскость въ P, а продолженіе его встрѣчаетъ поверхность другаго четырегранника въ M_1. Изъ точки P опустимъ перпендикуляръ PQ на линію ac и чрезъ линіи MM_1 и PQ проведемъ плоскость, которая пересѣклабы стороны dca и d_1ca по линіямъ MQ и M_1Q. Такъ какъ триgranные углы $abdc$ и abd_1c составленныя изъ равныхъ плоскихъ угловъ, то двугранные ихъ углы соотвѣтственно равны, и потому углы MQP и M_1QP, какъ линейные углы равныхъ двугранныхъ угловъ, равны между собою. Изъ этого слѣдуетъ, что прямоугольные треугольники MPQ и M_1PQ равны, и потому $MP = M_1P$, а это значитъ, что M и M_1 точки симметричныя относительно плоскости abc.

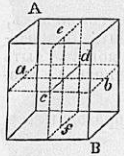
И такъ всякой точкѣ четырегранника $dabc$ соотвѣтствуетъ симметричная точка на четырегранникѣ d_1abc, слѣдов. эти два четырегранника симметричны.

Изъ этого слѣдуетъ, что всякій четырегранникъ можетъ имѣть только одинъ симметричный четырегранникъ, а такъ какъ симметричные многогранники состоятъ изъ симметричныхъ четырегранниковъ, то и всякій многогранникъ можетъ имѣть только одинъ симметричный многогранникъ.

§ 246. Когда симметричные многогранники расположены симетрично относительно плоскости симметріи, то они называются *симметричными по положенію*; въ другихъ случаяхъ—*симметричными по виду*.

Если плоскость раздѣляетъ многогранникъ на двѣ части симметричныя относительно этой плоскости, то такая плоскость называется *плоскостью симметріи*.

Есть многогранники, которые имѣютъ нѣсколько плоскостей симметріи: прямая призма имѣетъ по крайней мѣрѣ одну плоскость симметріи, а именно плоскость, раздѣляющую боковыя ребра пополамъ; прямоугольный параллелепипедъ имѣетъ три плоскости симметріи, а именно плоскости раздѣляющія боковыя ребра пополамъ; въ правильной призмѣ и правильной пирамидѣ всякая плоскость, проходящая чрезъ ось и чрезъ радіусъ или апоѳему основанія, есть плоскость симметріи, потому что дѣлитъ основаніе пополамъ (§ 126 слѣдств. 5).

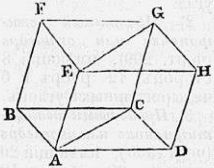


Черт. 296.

Если многогранникъ имѣетъ двѣ плоскости симметріи, то линія пересѣченія ихъ называется *осью симметріи*.

Ось правильной призмы или пирамиды есть также ось симметріи; прямоугольный параллелепипедъ AB (черт 296) имѣетъ три оси симметріи ab, cd и ef, представляющія линіи пересѣченія трехъ его плоскостей симметріи.

§ 247. ТЕОРЕМА. *Всякая діагональная плоскость $AEGC$* (черт. 297) *дѣлитъ параллелепипедъ AG на двѣ треугольныя призмы $ABCEFG$ и $ADCEHG$ симметричныя по виду.*



Черт. 297.

Доказ. Вообразимъ, что треугольныя призмы $ABCFFG$ и $ADCEHG$ раздѣлены изъ точекъ E и C на треугольныя пирамиды. Очевидно, что каждая призма раздѣлится на три треугольныя пирамиды, которыя имѣютъ соотвѣтственно равныя стороны; но такъ какъ эти пирамиды не могутъ быть совмѣщены, то они симметричны (§ 245), и потому и самыя треугольныя призмы симметричны.

§ 248. Симметрія по виду и по положенію встрѣчается весьма часто въ произведеніяхъ природы и искуства. Тѣло почти всѣхъ животныхъ состоитъ изъ двухъ симметричныхъ частей. Растительное царство представляетъ замѣчательные примѣры симметріи: почти каждый цвѣтокъ имѣетъ покрайней мѣрѣ одну плоскость симметріи.

Между каждымъ предметомъ и его изображеніемъ въ зеркалѣ есть кажущаяся симметрія по виду и положенію.

Въ произведеніяхъ искусства мы встрѣчаемъ симметрію на пр. между частями правильнаго зданія, моста, корабля, почти всей нашей мебели и др.

Правильные многогранники.

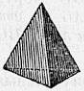
§ 249. *Правильнымъ многогранникомъ* называется многогранникъ, котораго всѣ ребра, стороны, плоскіе, двугранные и тѣлесные углы равны между собою.

Изъ равенства сторонъ, ребръ и плоскихъ угловъ слѣдуетъ, что стороны правильнаго многогранника суть правильные многоугольники, равные между собою.

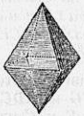
Сторона правильнаго многогранника не можетъ имѣть болѣе пяти вершинъ. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ каждый тѣлесный уголъ состоитъ, по крайней мѣрѣ, изъ трехъ плоскихъ угловъ, которыхъ сумма менѣе $4d$, а уголъ правильнаго шестиугольника равенъ $\frac{4}{3}d$, то очевидно, что изъ правильныхъ шестиугольниковъ, а тѣмъ болѣе изъ правильныхъ многоугольниковъ, имѣющихъ большее число сторонъ, нельзя составить правильный многогранникъ. Правильные многогранники могутъ быть составлены только изъ равностороннихъ триугольниковъ, квадратовъ и правильныхъ пятиугольниковъ.

Изъ равностороннихъ триугольниковъ можно образовать три правильныхъ многогранника:

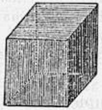
Черт. 298.

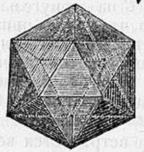


Черт. 299.

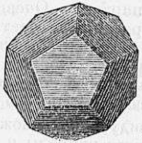


Черт. 301.





Черт. 300.



Черт. 302.

1) *Правильный четырегранникъ или тетраедръ* (черт. 298), имѣющій 4 стороны, 6 ребръ и 4 триграниыхъ угла.

2) *Правильный осмигранникъ или октаедръ* (черт. 299), имѣющій 8 сторонъ, 12 ребръ и 6 четырегранныхъ угловъ.

3) *Правильный двадцатигранникъ или икосаедръ* (черт. 300), имѣющій 20 сторонъ, 30 ребръ и 12 пятигранныхъ угловъ.

Многогранный уголъ, состоящій изъ равностороннихъ триугольниковъ не можетъ имѣть болѣе пяти плоскихъ угловъ, потому что каждый изъ нихъ равенъ $\frac{2}{3}d$ и сумма шести такихъ угловъ равна $4d$.

Изъ квадратовъ можно образовать только одинъ правильный многогранникъ:

4) *Правильный шестигранникъ или эксаедръ т. е. кубъ* (черт. 301), имѣющій 6 сторонъ, 12 ребръ и 8 триграниыхъ угловъ.

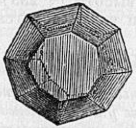
Изъ правильныхъ пятиугольниковъ также можетъ быть составленъ только одинъ правильный многогранникъ:

5) *Правильный двѣнадцатигранникъ или додекаедръ* (черт. 302), имѣющій 12 сторонъ, 30 ребръ и 20 триграниыхъ угловъ.

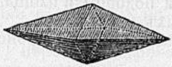
И такъ правильныхъ многогранниковъ можетъ быть только пять: тетраедръ, эксаедръ, октаедръ, додекаедръ и икосаедръ;

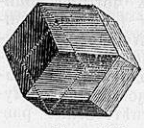
Правильные многогранники имѣютъ весьма важное значеніе въ кристаллографіи.

Черт. 303.

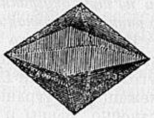


Черт. 304.





Черт. 305.



Черт. 306.

Кромѣ правильныхъ многогранниковъ встрѣчаются при изученіи кристалловъ нѣкоторые многогранники, не удовлетворяющіе условіямъ правильнаго многогранника, но представляющіе, тѣмъ не менѣе, нѣкоторую правильность по наружному виду, таковы:

1. *Октаедръ*, состоящій изъ двухъ правильныхъ и равныхъ пирамидъ съ квадратнымъ основаніемъ (чер 304).

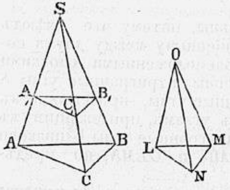
2. *Триугольный додекаедръ*, состоящій изъ двухъ правильныхъ и равныхъ пирамидъ съ правильнымъ шестиугольнымъ основаніемъ (черт. 306).

3. *Ромбоидальный додекаедръ*, состоящій изъ 12 равныхъ ромбовъ (черт. 305).

4. *Трапецоедръ*, котораго 24 стороны суть равные четыреугольники, называемые въ кристаллографіи трапецоидами (черт. 303).

Подобіе многогранниковъ.

§ 250. Два четырегранника, которыхъ двугранные углы соотвѣтственно равны и одинаково расположены, называются *подобными*.



Черт. 307.

Пусть будутъ $SABC$ и $OLMN$ (черт. 307) два подобныхъ четырегранника. Вслѣдствіе равенства двугранныхъ угловъ и триграниые ихъ углы соотвѣтственно равны (§ 223), а изъ этого слѣдуетъ, что и плоскіе углы соотвѣтственно равны.

Если же на ребрахъ SA, SB и SC отложимъ части $SA_1 = OL$, $SB_1 = OM$ и $SC_1 = ON$, то составится четырегранникъ $SA_1B_1C_1$, котораго стороны соотвѣтственно равны сторонамъ четырегранника $OLMN$, и потому эти четырегранники равны между собою (§ 238 слѣдств. 2). Вслѣдствіе этого триграниые углы C_1 и N равны, а потому $\angle A_1C_1S = \angle LNO = \angle ACS$ и $\angle B_1C_1S = \angle MNO = \angle BCS$; это значитъ, что линіи A_1C_1 и C_1B_1 соотвѣтственно параллельны линіямъ AC и CB, слѣдов. и плоскости $A_1B_1C_1$ и ABC параллельны между собою.

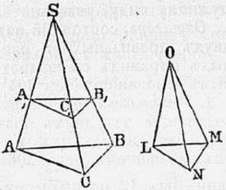
Изъ этого слѣдуетъ:

1. Сходственныя ребра подобныхъ четырегранниковъ пропорціональны между собою и относятся какъ высоты (§ 233).

2. Сходственныя стороны подобны и площади ихъ относятся какъ квадраты сходственныхъ реберъ.

3. Площади сходственныхъ сторонъ пропорціональны между собою.

§ 251. Теорема. *Два четырегранника подобны, когда имѣютъ по одной подобной сторонѣ и по три двугранныхъ угла, прилежащихъ къ ней, соотвѣтственно равныхъ и одинаково расположенныхъ.*



Черт. 307

Положимъ, что въ четырегранникахъ $SABC$ и $OLMN$ (чер. 307) треугольники ABC и LMN подобны и прилежащіе двугранные углы соотвѣтственно равны и одинаково расположены; требуется доказать, что двугранные углы соотвѣтственно равны между собою.

Доказ. Очевидно, что триграные углы A и L равны, потому что имѣютъ по равному плоскому углу, заключенному между двумя соотвѣтственно равными и одинаково расположенными двугранными углами (§ 222). Равнымъ образомъ триграные углы B и C равны триграннымъ угламъ M и N. Изъ равенства же трigранныхъ угловъ слѣдуетъ равенство двугранныхъ угловъ.

§ 252. Теорема. *Два четырегранника подобны, когда имѣютъ по равному двугранному углу, заключенному между двумя соотвѣтственно подобными и одинаково расположенными сторонами.*

Положимъ, что въ четырегранникахъ $SABC$ и $OLMN$ (черт. 307) двугр. угл. $CASB =$ двугр. угл. $NLOM$, $\triangle ASB \sim \triangle LOM$ и $\triangle ASC \sim \triangle LON$; требуется доказать, что эти четырегранники подобны.

Доказ. Триграные углы A и L равны, потому что имѣютъ по равному двугранному углу, заключенному между двумя соотвѣтственно равными и одинаково расположенными плоскими углами (§ 221). По той же причинѣ равны и триграные углы S и O. Изъ этого слѣдуетъ, что двугранные углы, прилежащіе къ треугольнику ASB, равны двуграннымъ угламъ, прилежащимъ къ треугольнику LOM; а такъ какъ эти двугранные углы одинаково расположены, то четырегранники $SABC$ и $OLMN$, по предъидущему §, подобны

§ 253. Теорема. *Два четырегранника подобны, когда имѣютъ по три подобныхъ и одинаково расположенныхъ стороны.*

Положимъ, что въ четырегранникахъ $SABC$ и $OLMN$ (чер. 307) треугольники ASB, BSC и CSA соотвѣтственно подобны треугольникамъ LOM, MON и NOL и одинаково съ нимъ расположены; требуется доказать, что эти четырегранники подобны.

Доказ. Очевидно, что триграные углы S и O равны, потому что составлены изъ равныхъ и одинаково расположенныхъ плоскихъ угловъ (§ 220); *слѣд.* двугр. уголъ $BSAC =$ двугр. углу $MOLN$, и потому четырегранники $SABC$ и $OLMN$, имѣя по равному двугранному углу, заключенному между двумя соотвѣтственно подобными сторонами, по предъидущему §, подобны.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что если четырегранникъ $SABC$ (черт. 307) пересѣчемъ плоскостью $A_1B_1C_1$, параллельною основанію ABC, то отсѣченный четырегранникъ $SA_1B_1C_1$ будетъ подобенъ всему четырграннику.

§ 254. Два многогранника, состоящіе изъ одинакаго числа подобныхъ и подобно расположенныхъ четырегранниковъ, называются *подобными*.

Очевидно, что въ подобныхъ многогранникахъ двугранные углы соотвѣтственно равны и одинаково расположены.

Теорема. Въ подобныхъ многогранникахъ сходственныя стороны подобны.

Доказ. Подобные многогранники состоятъ изъ подобныхъ четырегранниковъ; слѣдов. сходственныя стороны раздѣлятся на треугольники взаимно подобные и одинаково расположенные, а потому эти стороны будутъ многоугольники соотвѣтственно подобные.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что въ подобныхъ многогранникахъ:

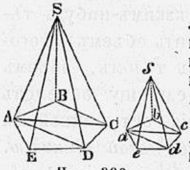
1. *Сходственные многогранные углы равны*, потому что они составлены изъ соотвѣтственно равныхъ и одинаково расположенныхъ плоскихъ и двугранныхъ угловъ.

2. *Сходственныя ребра и діагонали пропорціональны.*

3. *Сходственныя стороны относятся какъ квадраты сходственныхъ реберъ.*

4. *Поверхности относятся какъ квадраты сходственныхъ реберъ.*

§ 255. Теорема. *Двѣ пирамиды подобны, когда ихъ основанія подобны и онѣ имѣютъ по двѣ смежныхъ стороны, соотвѣтственно подобныхъ и одинаково расположенныхъ.*



Черт. 308.

Положимъ, что въ пирамидахъ $SABCDE$ и $sabcde$ (черт. 308) многоугольникъ $ABCDE$ подобенъ многоугольнику $abcde$, треугольникъ ASB—треугольнику asb и треугольникъ BSC—треугольнику bsc; требуется доказать, что эти пирамиды подобны.

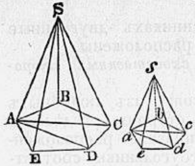
Доказ. Проведя діагольныя плоскости, ASC, ASD и asc, asd находимъ, что четырегранники $SABC$ и $sabc$ подобны, потому что имѣютъ по три соотвѣтственно подобныхъ и одинаково расположенныхъ стороны, а именно стороны, сосставляющія триграные углы B и b (§ 253).

Изъ подобія этихъ четырегранниковъ слѣдуетъ, что двугр. угл. $SACD =$ двуг. угл. $sacd$, а такъ какъ стороны, заключающія эти двугранные углы соотвѣтственно подобны и одинаково расположены, то четырегранники $SACD$ и $sacd$ также подобны.

Такимъ же образомъ доказывается подобіе другихъ четырегранниковъ.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что если пирамиду пересѣчемъ плоскостью параллельной основанію, то отсѣченная пирамида будетъ подобна всей пирамидѣ.

§ 256. Теорема. *Двѣ пирамиды подобны, когда ихъ основанія подобны и онѣ имѣютъ по одной сходственной сторонѣ подобной и одинаково наклоненной къ основанію.*



Черт. 308.

Положимъ, что въ парамидахъ $SABCDE$ и $sabcde$ (черт. 308) многоугольникъ $ABCDE$ подобенъ многоугольнику $abcde$, треугольникъ ASB—треугольнику asb, и что двугр. угл. $SABC =$ двугр. угл. $sabc$; требуется доказать, что эти пирамиды подобны.

Доказ. Проведя діагональныя плоскости ASC, ASD и asc, asd, находимъ, что четырегранники $SABC$ и $sabc$ подобны, потому что имѣютъ по равному двугранному углу, заключенному между двумя подобными и одинаково расположенными сторонами (§ 252). Изъ этого слѣдуетъ, что треугольники BSC и bsc подобны, а потому пирамиды $SABCDE$ и $sabcde$, по предъидущему §, подобны.

ГЛАВА IV.

Измѣреніе объемовъ тѣлъ.

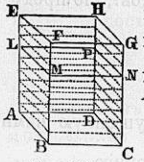
ОБЪЕМЪ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА, ПРИЗМЫ И ПИРАМИДЫ. ОБЪЕМЫ ПОДОБНЫХЪ МНОГОГРАННИКОВЪ. ЗАДАЧИ.

Объемъ параллелепипеда, призмы и пирамиды.

§ 257. Пространство, занимаемое какимъ-нибудь тѣломъ, называется его *объемомъ*. Измѣрить объемъ какого-нибудь тѣла значитъ сравнить его съ тѣломъ, объемъ котораго принятъ за единицу. За единицу объемовъ принимаютъ кубъ, котораго измѣренія суть линейныя единицы. Такой кубъ называется *кубической единицею*. Такъ напр. если за линейную единицу принимаемъ футъ, то единицею объемовъ будетъ кубическій футъ, т. е. кубъ, каждое ребро котораго равняется одному футу.

Два тѣла, имѣющія равные объемы, называются *равновеликими*.

§ 258. Теорема. *Объемы двухъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ, имѣющихъ одинакое основаніе, относятся между собою какъ высоты.*

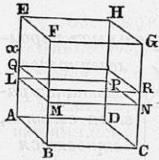


Черт, 309.

Положимъ, что AG и AN (черт. 309) суть два прямоугольныхъ параллелепипеда, имѣющихъ общее основаніе AC; требуется доказать, что $\frac{AG}{AN} = \frac{AE}{AL}$.

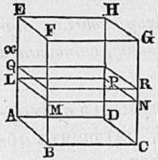
Доказ. Разсмотримъ два случая:

1-й случай. Положимъ, что высоты AE и AL соизмѣримы и общая мѣра содержится m разъ въ AE и n разъ въ AL, такъ что $\frac{AE}{AL} = \frac{m}{n}$. Если чрезъ точки дѣленія линіи AE вообразимъ плоскости, параллельныя основанію, то параллелепипеды AG и AN раздѣлятся на m и n прямоугольныхъ параллелепипедовъ, равныхъ между собою (§ 227); слѣдов. $\frac{AG}{AN} = \frac{m}{n}$, и потому $\frac{AG}{AN} = \frac{AE}{AL}$.



Черт. 310.

2-й случай. Положимъ, что высоты AE и AL (чер. 310) двухъ параллелепипедовъ AG и AN несоизмѣримы и докажемъ, что отношеніе $\frac{AG}{AN}$ не можетъ быть ни меньше ни больше отношенія $\frac{AE}{AL}$. Въ самомъ дѣлѣ если $\frac{AG}{AN} < \frac{AE}{AL}$, то вмѣсто AL возьмемъ большую линію Ax, такъ чтобы $\frac{AG}{AN} = \frac{AE}{Ax}$. Раздѣлимъ линію AE на такое число равныхъ частей, чтобы каждая часть была меньше Lx, тогда, по крайней мѣрѣ, одна изъ точекъ дѣленія упадетъ между L и x; положимъ,



Черт. 310.

что Q есть такая точка. Вообразивъ чрезъ Q плоскость QR параллельную основанію, составимъ параллелепипедъ AR, котораго высота соизмѣрима съ высотою параллелепипеда AG, слѣдов., по предъидущему, имѣемъ

$$\frac{AG}{AR}=\frac{AE}{AQ}.$$

Если эту пропорцію раздѣлимъ на допущенную нами пропорцію $\frac{AG}{AN}=\frac{AE}{Ax}$, то получимъ пропорцію

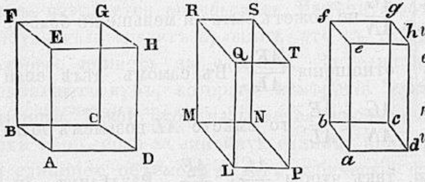
$$\frac{AN}{AR}=\frac{Ax}{AQ},$$

которая невѣрна, потому что $\frac{AN}{AR}<1$, а $\frac{Ax}{AQ}>1$.

Изъ этого слѣдуетъ, что предположеніе $\frac{AG}{AN}<\frac{AE}{AL}$ не справедливо.

Подобнымъ же образомъ можно обнаружить несправедливость предположенія $\frac{AG}{AN}>\frac{AE}{AL}$, а изъ этого слѣдуетъ, что $\frac{AG}{AN}=\frac{AE}{AL}$.

§ 259. Теорема. *Объемы двухъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ имѣющихъ равныя высоты, относятся какъ площади ихъ основаній.*



Черт. 311.

Положимъ, что прямоугольные параллелепипеды AG и LS (черт. 311) имѣютъ равныя высоты AE и LQ; требуется доказать, что $\frac{AG}{LS}=\frac{ABCD}{LMNP}$.

Доказ. Вообразимъ прямоугольный параллелепипедъ ag, который имѣетъ туже высоту, какъ параллелепипеды AG и LS, но въ которомъ $ab=AB$ и $bc=MN$. Если въ параллелепипедахъ AG и ag примемъ прямоугольники AF и af за основанія, и замѣтимъ, что эти прямоугольники, по построенію, равны, то (§ 258).

$$\frac{AG}{ag}=\frac{BC}{bc}.$$

Если же въ параллелепипедахъ LS и ag примемъ прямоугольники MS и bg за основанія, и замѣтимъ, что эти прямоугольники, по построенію, равны, то

$$\frac{ag}{LS}=\frac{ab}{LM}.$$

Умноживъ эту пропорцію на предъидущую, найдемъ

$$\frac{AG}{LS}=\frac{BC.\ ab}{bc.\ LM}$$

Но такъ какъ, по построенію, $ab=AB$ и $bc=MN$, то произведенія $BC\,.\,ab$ и $bc\,.\,LM$ выражаютъ площади основаній $ABCD$ и $LMNP$, слѣдов.

$$\frac{AG}{LS}=\frac{ABCD}{LMNP}.$$

§ 260. Теорема. *Объемы двухъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ, имѣющихъ разныя основанія и высоты, относятся какъ произведенія площадей основаній на высоты.*

Положимъ, что параллелепипеды P и P_1 имѣютъ основаніями b и b_1, а высотами h и h_1; требуется, доказать, что

$$\frac{P}{P_1}=\frac{b.h}{b_1.h_1}.$$

Доказ. Вообразимъ третій параллелепипедъ Q, который имѣлъ бы основаніе b и высоту h_1, тогда (§§ 258, 259)

$$\frac{P}{Q}=\frac{h}{h_1}\text{ и }\frac{Q}{P_1}=\frac{b}{b_1}.$$

Умноживъ эти двѣ пропорціи, найдемъ

$$\frac{P}{P_1}=\frac{b.\,h}{b_1\,h_1}.$$

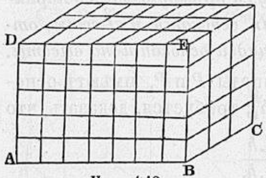
§ 261. Теорема. *Объемъ прямоугольнаго параллелепипеда равняется произведенію площади его основанія на высоту.*

Доказ. Положимъ, что прямоугольный параллелепипедъ P имѣетъ основаніе b и высоту h, и пусть будетъ Q кубическая единица. По предъидущему § имѣемъ $\frac{P}{Q}=\frac{b.\,h}{1.\,1}$ а такъ какъ Q принимается за единицу, то $P=b.\,h$. Это значитъ, что число кубическихъ единицъ, заключающихся въ объемѣ прямоугольнаго параллелепипеда, равняется произведенію чиселъ, выражающихъ высоту и площадь его основанія. Предложеніе это обыкновенно выражается такъ: объемъ параллелепипеда равняется произведенію его основанія на высоту.

Если чрезъ h изобразимъ высоту прямоугольнаго параллелепипеда, а чрезъ l и m два другихъ измѣренія его, то $l.\,m$ будетъ площадь основанія, слѣд.

$$P=h.\,l.\,m.$$

т. е. *объемъ прямоугольнаго параллелепипеда равняется произведенію трехъ его измѣреній.*



Черт. 312.

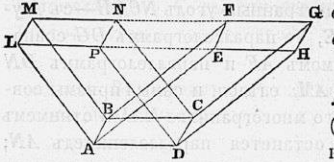
Положимъ напр., что высота BE прямоугольнаго параллелепипеда CD (черт. 312) содержитъ пять единицъ, а два другія его измѣренія AB и BC семь и три единицы, тогда объемъ его будетъ равняться 5. 7. 3=105 кубическимъ единицамъ. Не трудно удостовѣриться въ справедливости этого вывода, проведя чрезъ точки дѣленія каждой изъ трехъ линій BE, AB и BC плоскости, параллельныя двумъ другимъ линіямъ: весь параллелепипедъ раздѣлится на 105 равныхъ кубовъ, изъ которыхъ каждый представитъ кубическую единицу.

Очевидно, что объемъ куба, котораго ребро есть a, равняется a^3; вслѣдствіе этого третья степень какого-нибудь количества называется кубомъ. (*)

Изъ сказаннаго слѣдуетъ: если отношеніе двухъ линейныхъ единицъ a и b есть m, т. е. $\frac{a}{b}=m$, то отношеніе тѣхъ же кубическихъ единицъ $\frac{a^3}{b^3}$ будетъ m^3; это значитъ: отношеніе кубическихъ единицъ равняется третьей степени отношенія линейныхъ единицъ. Такъ напр. отношеніе двухъ линейныхъ единицъ: фута и дюйма, есть 12; отношеніе же кубическаго фута къ кубическому дюйму будетъ $12^3=1728$, т. е. кубическій футъ содержитъ 1728 кубическихъ дюймовъ.

На этомъ основано раздробленіе кубическихъ единицъ.

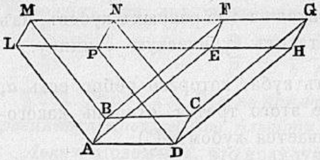
§ 262. Теорема. *Параллелепипеды, имѣющіе общее основаніе и равныя высоты, равновелики.*



Черт. 313.

Положимъ, что параллелепипеды AN и AG (черт. 313) имѣютъ одинакое основаніе AC и равныя высоты; требуется доказать, что эти параллелепипеды равновелики.

(*) Знаменитая въ древности задача *удвоеніе куба* состоитъ въ опредѣленіи куба, объемъ котораго былъ бы вдвое болѣе объема даннаго куба. Если чрезъ a означимъ ребро даннаго куба, а чрезъ x—ребро искомаго, то $x^3=2a^3$ и отсюда $x=a\sqrt[3]{2}$. Слѣдов. ребро искомаго куба зависитъ отъ ирраціональ-

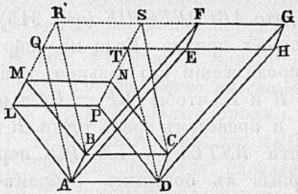


Черт. 313.

Доказ. Замѣтивъ, что верхнія основанія ***LN*** и ***EG*** двухъ параллелепипедовъ лежатъ въ одной плоскости, положимъ, вопервыхъ, что линіи ***EH*** и ***FG*** суть продолженія линій ***LP*** и ***MN***, т. е., что боковыя стороны ***AP*** и ***AH*** лежатъ въ одной плоскости, также какъ и боковыя стороны ***BN*** и ***BG*** или, что оба параллелепипеда заключены между двумя параллельными плоскостями ***AH*** и ***BG***.

Не трудно удостовѣриться наложеніемъ, что треугольныя призмы ***MBFLAE*** и ***NCGPDH*** равны. Въ самомъ дѣлѣ, параллелограммы ***AM*** и ***DN***, а также ***AF*** и ***DG***, равны, какъ противуположныя стороны параллелепипеда, двугранные же углы ***MBAE*** и ***NCDH***, составленные плоскостями соотвѣтственно параллельными, очевидно равны потому что ихъ линейные углы равны между собою (§ 208). Изъ этого слѣдуетъ, что если призму ***NCGPDH*** вложимъ въ призму ***MBFLAE*** такъ, чтобы ребро ***DC*** совпало съ ребромъ ***AB*** и двугранный уголъ ***NCDH***—съ двуграннымъ угломъ ***MBAE***, то параллелограммъ ***DG*** совпадетъ съ параллелограммомъ ***AF*** и параллелограммъ ***DN*** съ параллелограммомъ ***AM***; слѣдов. и самыя призмы совмѣстятся. Если отъ всего многогранника ***MADG*** отнимемъ призму ***NCGPDH***, то останется параллелепипедъ ***AN***; если отъ тогоже многогранника отнимемъ равную призму ***MBFLAE***, то останется параллелепипедъ ***AG***. Отсюда мы заключаемъ, что параллелепипеды ***AN*** и ***AG*** равновелики.

Положимъ, во вторыхъ, что параллелепипеды ***AN*** и ***AG*** (черт. 314), имѣющіе одинакое основаніе ***AC*** и равныя высоты, не заключаются между двумя параллельными плоскостями.



Черт. 314.

Продоживъ плоскости ***AH BG***, ***CP***, ***BL*** и ***EG***, составимъ третій параллелепипедъ ***ABCDQRST***, который имѣетъ общее основаніе и одинакую высоту съ параллелепипедами ***AN*** и ***AG*** и заключается, какъ съ первымъ такъ и со вторымъ, между параллельными плоскостями. Изъ этого слѣдуетъ, что онъ равновеликъ какъ параллелепипеду ***AN*** такъ и параллелепипеду ***AG***, а потому параллелепипеды ***AN*** и ***AG*** равновелики между собою.

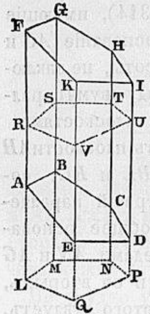
§ 263. Теорема. *Объемъ всякаго параллелепипеда равняется произведенію основанія на высоту.*

Означимъ площадь основанія какого-нибудь параллелепипеда чрезъ b, высоту его чрезъ h и объемъ чрезъ V; требуется доказать, что $V = b.\ h.$

Доказ. Вообразивъ прямоугольный параллелепипедъ, имѣющій то же основаніе и ту же высоту, заключаемъ, на основаніи предъидущаго §, что эти два параллелепипеда равновелики; а такъ какъ объемъ прямоугольнаго параллелепипеда равняется $b.\ h$ (§ 261), то $V = b.\ h.$

§ 264. Теорема. *Всякая наклонная призма равновелика прямой призмѣ, которой высота равняется боковому ребру наклонной призмы, а основаніе — равно сѣченію перпендикулярному къ боковымъ ребрамъ наклонной призмы.*

ной величины $\sqrt[3]{2}$, которой нельзя построить съ помощію Геометріи Евклида, т. е. съ помощію циркуля и линейки, а потому геометрическое удвоеніе куба есть задача невозможная.



Черт. 315.

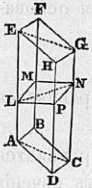
Положимъ, что $ABCDEFGHIK$ (чер. 315), есть наклонная призма. Если на ребрѣ AF и на продолженіи его возьмемъ такія двѣ точки R и L, чтобы $RF = LA$ или $LR = AF$, и проведемъ чрезъ точки R и L плоскости $RSTUV$ и $LMNPQ$ перпендикулярныя къ боковымъ ребрамъ, то составится прямоугольная призма $LMNPQRSTUV$, которой высота RL равняется боковому ребру FA наклонной призмы, а основаніе $LMNPQ$ есть сѣченіе перпендикулярное къ боковымъ ребрамъ наклонной призмы; требуется доказать, что призмы $ABCDEFGHIK$ и $LMNPQRSTUV$ равновелики.

Доказ. Замѣтимъ, что въ многогранникахъ RH и LC сторона $RSTUV$ равна сторонѣ $LMNPQ$ и сторона $FGHIK$ равна сторонѣ $ABCDE$. Кромѣ того боковыя ребра ихъ соотвѣтственно равны. Въ самомъ дѣлѣ линіи CH и AF, какъ параллельныя заключенныя между параллельными плоскостями, равны; также равны и линіи TN и RL. Но такъ какъ $AF = LR$, то $HC = TN$. Изъ этого слѣдуетъ, что $HT = CN$. Подобнымъ же образомъ доказывается равенство другихъ боковыхъ реберъ многогранниковъ RH и LC.

Вложимъ теперь многогранникъ RH въ многогранникъ LC такъ, чтобы сторона $RSTUV$ совпала съ стороною $LMNPQ$. Такъ какъ боковыя ребра соотвѣтственно равны и перпендикулярны къ плоскости LP, то они также совпадутъ, и потому многогранникъ RH совмѣстится съ многогранникомъ LC.

Если къ многограннику $ADUR$ прибавимъ часть RH, то получимъ наклонную призму $ABCDEFGHIK$, а если къ тому же многограннику $ADUR$ прибавимъ часть LC, то получимъ прямую призму $LMNPQRSTUV$; изъ этого слѣдуетъ, что наклонная и прямая призмы равновелики.

§ 265. Теорема. *Всякій параллелепипедъ дѣлится діагональною плоскостью на двѣ равновеликія треугольныя призмы.*

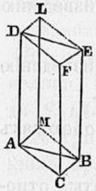


Черт. 316.

Положимъ, что $ABCDEFGH$ (черт. 316) есть какой-нибудь параллелепипедъ и $AEGC$ діагональная плоскость; требуется доказать, что призмы $ADCEHG$ и $ABCEFG$ равновелики.

Доказ. Пусть будетъ $LMNP$ сѣченіе, перпендикулярное къ боковымъ ребрамъ параллелепипеда. Вслѣдствіе параллельности противуположныхъ сторонъ параллелепипеда $LM \parallel PN$ и $LP \parallel MN$, а потому четыреугольникъ $LMNP$ будетъ параллелограммъ и слѣд. треугольники LNP и LMN равны между собою. Изъ этого слѣдуетъ, что двѣ наклонныя треугольныя призмы, на которыя раздѣляется параллелепипедъ, по предъидущему §, равны двумъ прямымъ призмамъ, имѣющимъ одинакую высоту AE и равныя основанія LMN и LNP; а такъ какъ прямыя призмы съ равными основаніями и равными высотами равны (§ 227), то двѣ наклонныя треугольныя призмы $ABCEFG$ и $ADCEHG$ равновелики.

§ 266. Теорема *Объемъ треугольной призмы равняется произведенію ея основанія на высоту.*



Черт. 317.

Доказ. Пусть будетъ $ABCDEF$ (черт. 317). какая нибудь треугольная призма. Дополнивъ треугольникъ ABC до параллелограмма $AMBC$ и построивъ надъ этимъ параллелограммомъ параллелепипедъ $AMBCDLEF$, найдемъ, по предъидущему §, что треугольная призма $ABCDEF$ есть половина этого параллелепипеда; а такъ какъ объемъ параллелепипеда равняется произведенію основанія $AMBC$ на высоту призмы, то объемъ призмы

ABCDEF будетъ равняться половинѣ произведенія параллелограмма *AMBC* на высоту призмы; но половина параллелограмма *AMBC* есть триугольникъ *ABC*, слѣд. объемъ триугольной призмы равняется произведенію ея основанія на высоту.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ:

1. Объемъ прямой триугольной призмы равняется произведенію ея основанія на боковое ребро.

2. Объемъ наклонной триугольной призмы равняется произведенію перпендикулярнаго къ ея ребрамъ сѣченія на боковое ребро ея.

§ 267. Теорема. *Объемъ всякой многоугольной призмы равняется произведенію ея основанія на высоту.*

Доказ. Такъ какъ всякая многоугольная призма можетъ быть раздѣлена діагональными плоскостями на триугольныя призмы, имѣющія одинакую съ ней высоту, сумма же основаній этихъ призмъ равняется основанію многоугольной призмы, то заключаемъ, что объемъ многоугольной призмы равняется суммѣ триугольниковъ, составляющихъ ея основаніе, умноженной на высоту, т. е. произведенію ея основанія на высоты.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ:

1. Объемъ прямой призмы равняется произведенію ея основанія на боковое ребро.

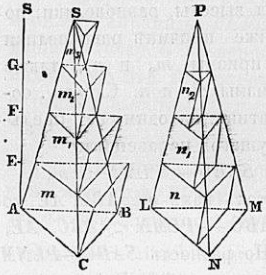
2. Объемъ наклонной призмы равняется произведенію площади перпендикулярнаго сѣченія на ребро.

3. Объемы двухъ призмъ относятся между собою какъ произведенія основаній на высоты.

4. Объемы призмъ, имѣющихъ равныя высоты, относятся какъ площади основаній.

5. Объемы призмъ, имѣющихъ равновеликія основанія, относятся какъ высоты.

§ 268. Теорема. *Двѣ триугольныя пирамиды, имѣющія равновеликія основанія и равныя высоты, равновелики.*



Черт. 318.

Положимъ, что триугольныя парамиды *SABC* и *PLMN* (черт. 318) имѣютъ равновеликія основанія *ABC* и *LMN* и одинакую высоту, равную *SA*; требуется доказать, что эти пирамиды равновелики.

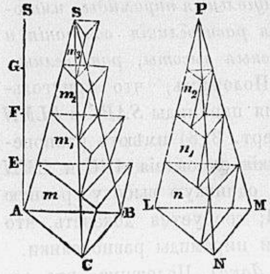
Доказ. Положимъ, что основанія двухъ пирамидъ находятся въ одной плоскости.

Пусть эти пирамиды не равны, напр. первая больше второй, и пусть разность между ними будетъ *P*, такъ что $SABC - PLMN = P$. Представимъ количество *P* въ видѣ произведенія площади триугольника *ABC* на нѣкоторую величину *h*, т. е. положимъ $P = ABC . h$, и раздѣлимъ высоту *SA* на столько равныхъ частей *SG*, *GF*, *FE*, *EA*, чтобы каждая часть была менѣе *h*. Если чрезъ точки дѣленія *G*, *F*, *E* проведемъ плоскости, параллельныя основаніямъ парамидъ, то эти плоскости пересѣкутъ пирамиды по триугольникамъ соотвѣтственно равновеликимъ, потому что эти триугольники, по § 234, пропорціональны основаніямъ *ABC* и *LMN*, а эти основанія, по положенію, равновелики. Вообразимъ надъ триугольниками въ пирамидѣ *SABC* рядъ выходящихъ призмъ m, m_1, m_2, m_3 и надъ триугольниками въ пирамидѣ *PLMN* рядъ входящихъ призмъ n, n_1, n_2. Изъ построенія видно, что

$$SABC < m + m_1 + m_2 + m_3 \text{ и } PLMN > n + n_1 + n_2.$$

Вычитая изъ перваго неравенства второе, находимъ

$$SABC - PLMN < (m + m_1 + m_2 + m_3) - (n + n_1 + n_2);$$



Черт. 318.

Но призмы m_3 и n_2, имѣющія равныя основанія и равныя высоты, равновелики; по тойже причинѣ равновелики и призмы m_2 и n_1, также призмы m_1 и n. Слѣдов., сокративъ, находимъ изъ предъидущаго неравенства

$$SABC - PLMN < m;$$

а такъ какъ $m = ABC.\ AE$, то

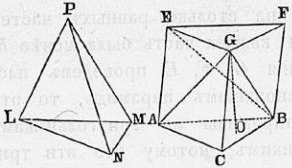
$$SABC - PLMN < ABC.\ AE.$$

Но разность $SABC - PLNM$ мы означили чрезъ P, или чрезъ $ABC.\ h$; слѣдов.

$$ABC.h < ABC.\ AE.$$

Сокративъ на ABC, получимъ $h < AE$, что противно положенію. Изъ этого слѣдуетъ, что пирамиды $SABC$ и $PLMN$ равновелики.

§ 269. Теорема. *Треугольная пирамида есть треть призмы, имѣющей съ ней равновеликое основаніе и равную высоту.*



Черт. 319.

Положимъ, что треугольная пирамида $PLMN$ и треугольная призма $ABCEFG$ (черт. 319) имѣютъ равновеликія основанія LMN и ABC и одинакую высоту GO; требуется доказать, что $PLMN = \frac{1}{3}\ ABCEFG$.

Доказ. Проведя въ призмѣ $ABCEFG$ плоскости AGB и EGB, раздѣлимъ ее на три треугольныя пирамиды $GABC$, $GAEB$ и $BGEF$. Такъ какъ треугольники LMN и ABC, по положенію, равновелики и высоты двухъ парамидъ $PLMN$ и $GABC$ равны, то эти парамиды, по предъидущему §, равновелики. По той же причинѣ равновелики и парамиды $PLMN$ и $BFEG$. Если же примемъ треугольникъ BEF за основаніе и точку G за вершину пирамиды $BEFG$, треугольникъ AEB за основаніе и точку G за вершину пирамиды $GAEB$, то очевидно, что эти двѣ пирамиды, имѣя равныя основанія и равныя высоты, будутъ также равновелики.

Отсюда мы заключаемъ, что призма $ABCEFG$ состоитъ изъ трехъ пирамидъ равныхъ между собою и равновеликихъ пирамидѣ $PLMN$; слѣдов. пирамида $PLMN$ есть третья часть призмы $ABCEFG$.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что *объемъ всякой треугольной пирамиды равняется трети произведенія ея основанія на высоту.*

§ 270. Теорема. *Объемъ многоугольной пирамиды равняется одной трети произведенія ея основанія на высоту.*

Доказ. Такъ какъ всякая многоугольная пирамида можетъ быть раздѣлена діагональными плоскостями на треугольныя пирамиды, имѣющія одинакую съ нею высоту, сумма же основаній этихъ парамидъ равняется основанію многоугольной пирамиды, то объемъ многоугольной пирамиды равняется одной трети суммы треугольниковъ, составляющихъ ея основаніе, умноженной на высоту, т. е. одной трети произведенія ея основанія на высоту.

Изъ этото предложенія слѣдуетъ:

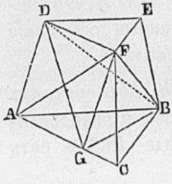
1. Всякая пирамида есть треть призмы, имѣющей съ ней равную высоту и равновеликое основаніе.

2. Объемы двухъ пирамидъ относятся какъ произведенія ихъ основаній на высоты.

3. Объемы двухъ пирамидъ съ равными высотами относятся какъ ихъ основанія.

4. Объемы двухъ пирамидъ съ равновеликими основаніями относятся какъ ихъ высоты.

§ 271. Теорема. *Объемъ усѣченной треугольной пирамиды равняется суммѣ объемовъ трехъ треугольныхъ пирамидъ, имѣющихъ высоту общую съ усѣченной пирамидою, а основанія: первая — нижнее, вторая — верхнее основаніе усѣченной пирамиды, а третья — среднее пропорціональное между ними.*



Черт. 320.

Пусть будетъ $ABCDEF$ (черт. 320) усѣченная треугольная пирамида; требуется доказать, что она равна суммѣ трехъ пирамидъ одинакой съ нею высоты, основаніями которыхъ будутъ треугольники ABC, DEF и среднiй пропорціональный между ними.

Доказ. Проведя плоскости AFB и DFB, раздѣляемъ усѣченную пирамиду на три треугольныя пирамиды $FABC$, $BDEF$ и $FADB$, изъ которыхъ первыя двѣ имѣютъ высоту общую съ усѣченной пирамидою, а основаніями — нижнее и верхнее основанія усѣченной пирамиды.

Проведя въ плоскости $ADFC$ линію FG параллельно линіи AD, составимъ пирамиду $GABD$, имѣющую одинакое основаніе ADB съ третьею пирамидою $FABD$, и равную съ ней высоту, потому что вершины F и G лежатъ на линіи, параллельной плоскости ADB; слѣдов. эти пирамиды равновелики. Принимая треугольникъ ABG за основаніе и точку D за вершину пирамиды $GABD$, заключаемъ, что третья изъ пирамидъ, на которыя раздѣлилась усѣченная, равновелика пирамидѣ, имѣющей высотою высоту усѣченной пирамиды, и основаніемъ треугольникъ GAB. Треугольникъ GAB есть среднiй пропорціональный между треугольниками ABC и DEF. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ треугольники ABC и ABG имѣютъ общую вершину B и различныя основанія AC и AG, то $\frac{ABC}{ABG}=\frac{AC}{AG}$ (§ 141 слѣдствіе 4). Замѣтивъ притомъ, что въ треугольникахъ GAB и FDE углы A и D равны (§ 199) и $AG = DF$ (§ 37), находимъ (§ 148): $\frac{ABG}{DEF}=\frac{AG.AB}{DF.DE}=\frac{AB}{DE}$. Такъ какъ треугольники ABC и DEF подобны, то $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{AC}{AG}$, слѣдов. $\frac{ABC}{ABG}=\frac{ABG}{DEF}$.

Если означимъ высоту усѣченной пирамиды чрезъ H, нижнее и верхнее основанія ея чрезъ B и b, то объемъ ея выразится чрезъ

$$\frac{H}{3}(B+b+\sqrt{Bb}).$$

Теорема, доказанная въ этомъ § для усѣченной треугольной пирамиды, справедлива также для всякой усѣченной многоугольной пирамиды. Въ самомъ дѣлѣ, означимъ высоту усѣченной многоугольной пирамиды чрезъ H, нижнее и верхнее основанія ея чрезъ B и b и положимъ, что она діагональными плоскостями раздѣлена на треугольныя усѣченныя пирамиды, нижними основаніями которыхъ пусть будутъ T_1, T_2, T_3, ..., а соотвѣтственными верхними основаніями t_1, t_2, t_3.., такъ что

$$B = T_1 + T_2 + T_3 \ldots \text{ и } b = t_1 + t_2 + t_3 \ldots$$

На основаніи предъидущей теоремы объемъ усѣченной многоугольной пирамиды будетъ равняться:

$$\frac{H}{3}\left[T_1+\sqrt{T_1.t_1}+t_1+T_2+\sqrt{T_2.t_2}+t_2+\ldots\right]=$$
$$=\frac{H}{3}\left[B+b+\sqrt{T_1.t_1}+\sqrt{T_2.t_2}+\sqrt{T_3.t_3}\ldots\right].$$

Нижнее и верхнее основанія усѣченной многоугольной пирамиды суть подобные многоугольники, а потому триугольники T_1, T_2, T_3.. соотвѣтственно подобны триугольникамъ t_1, t_2, t_3...; такъ какъ площади подобныхъ фигуръ относятся какъ квадраты сходственныхъ сторонъ, то

$$\frac{T_1}{t_1}=\frac{T_2}{t_2}=\frac{T_3}{t_3}..=\frac{B}{b}.$$

Помножая числителя и знаменателя каждой дроби на знаменателя ея и извлекая квадратный корень, получаемъ

$$\frac{\sqrt{T_1.\,t_1}}{t_1}=\frac{\sqrt{T_2.\,t_2}}{t_2}=\frac{\sqrt{T_3.\,t_3}}{t_3}..=\frac{\sqrt{Bb}}{b};$$

отсюда:

$$\frac{\sqrt{T_1.\,t_1}+\sqrt{T_2.\,t_2}+\sqrt{T_3.\,t_3}....}{t_1+t_2+t_3....}=\frac{\sqrt{Bb}}{b}.$$

Но

$$t_1+t_2+t_3...=b,$$

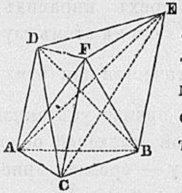
слѣдовательно

$$\sqrt{T_1.\,t_1}+\sqrt{T_2.\,t_2}+\sqrt{T_3.\,t_3}...=\sqrt{Bb}.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что объемъ усѣченной многоугольной пирамиды равняется

$$\frac{H}{3}(B+\sqrt{B.\,b}+b).$$

§ 272. ТЕОРЕМА. *Усѣченная триугольная призма состоитъ изъ трехъ пирамидъ, имѣющихъ общее съ нею основаніе, а вершины въ трехъ вершинахъ не параллельнаго сѣченія.*



Черт. 321.

Положимъ, что $ABCDEF$ (черт. 321) есть усѣченная триугольная призма; требуется доказать, что она равна суммѣ трехъ пирамидъ, имѣющихъ общее съ нею основаніе ABC, а вершины въ точкахъ D, E и F.

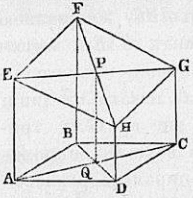
Доказ. Проведя плоскости AFB и AFE, раздѣляемъ усѣченную призму на три триугольныя пирамиды $FABC$, $FAEB$ и $FAED$. Первая изъ нихъ имѣетъ основаніемъ ABC, а вершиною точку F. Вторая равновелика пирамидѣ $CAEB$, имѣющей общее съ нею основаніе AEB и равную съ нею высоту, такъ какъ обѣ вершины F и C лежатъ на линіи FC, параллельной основанію. Если же примемъ триугольникъ ABC за основаніе и E за вершину пирамиды $CABE$, то очевидно, что вторая пирамида равновелика пирамидѣ, имѣющей основаніе ABC и вершину въ точкѣ E.

Наконецъ третья пирамида $FADE$ равновелика пирамидѣ $CDAB$, потому что онѣ имѣютъ равновеликія основанія ADE и ADB и равныя высоты, такъ какъ обѣ вершины C и F лежатъ на линіи параллельной основанію. Если же примемъ триугольникъ ABC за основаніе и точку D за вершину пирамиды $CADB$, то заключимъ, что третья пирамида равновелика пирамидѣ, имѣющей основаніемъ ABC и вершину въ точкѣ D.

И такъ усѣченная призма состоитъ изъ трехъ пирамидъ, которыя имѣютъ общимъ основаніемъ ABC и вершины въ трехъ точкахъ F, E и D.

Означимъ основаніе призмы чрезъ b и чрезъ l, m и n перпендикуляры, опущенные на него изъ точекъ D, F и E; тогда объемъ усѣченной призмы выразится чрезъ $\frac{b}{3}(l+m+n)$. Въ случаѣ прямой усѣченной призмы, боковыя ребра ея будутъ высотами трехъ пирамидъ, изъ которыхъ она состоитъ, и такъ какъ въ этомъ случаѣ $\frac{l+m+n}{3}$ есть средняя ариѳметическая изъ этихъ реберъ, то изъ этого слѣдуетъ, что прямая усѣченная треугольная призма равновелика прямой, имѣющей основаніе общее съ усѣченной, а высоту — среднее ариѳметическое изъ боковыхъ реберъ первой.

§ 273. Теорема. *Объемъ прямаго усѣченнаго параллелепипеда ABCDEFGH* (черт. 322) *равняется произведенію основанія ABCD на среднее ариѳметическое изъ двухъ противуположныхъ боковыхъ реберъ.*



Черт. 322.

Доказ. Усѣченный параллелепипедъ AG состоитъ изъ двухъ усѣченныхъ треугольныхъ призмъ $ABDEFH$ и $BCDFGH$, имѣющихъ равныя основанія ABD и BCD, и потому объемъ усѣченнаго параллелепипеда равняется

$$\frac{ABD}{3}(AE+BF+DH+BF+CG+DH)=$$

$$\frac{ABD}{3}(AE+CG+2BF+2DH).$$

Замѣтивъ, что въ четыреугольникѣ $EFGH$ противуположныя стороны параллельны (§ 202 слѣдствіе 1), что слѣдов. этотъ четыреугольникъ есть параллелограммъ, проведемъ діагональныя плоскости EC и FD. Такъ какъ линіи EG и FH, AC и BD дѣлятся пополамъ, то PQ есть средняя линія двухъ трапецій $AEGC$ и $BFHD$, а потому $PQ=\frac{AE+CG}{2}=\frac{BF+DH}{2}$; слѣдов. $AE+CG=BF+DH$. По этому объемъ усѣченнаго параллелепипеда равняется

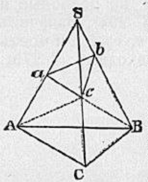
$$\frac{ABD}{3}(3BF+3DH)=ABD.(BF+DH),$$

а такъ какъ $ABD=\frac{ABCD}{2}$, то объемъ этотъ выразится чрезъ

$$ABCD.\frac{BF+DH}{2}.$$

Объемы подобныхъ многогранниковъ.

§ 274. Теорема. *Объемы двухъ треугольныхъ пирамидъ, имѣющихъ общій трегранный уголъ, относятся между собою какъ произведенія реберъ, сходящихся въ вершинѣ этого треграннаго угла.*



Черт. 323.

Положимъ, что $SABC$ и $Sabc$ (черт. 323) суть двѣ пирамиды, имѣющія общій трегранный уголъ S; требуется доказать, что $\frac{SABC}{Sabc}=\frac{SA.SB.SC}{Sa.Sb.Sc}$.

Доказ. Соединивъ точку c съ точками A и B и замѣтивъ, что треугольныя пирамиды $ASBC$ и $ASBc$ имѣютъ общую вершину A, а основанія ихъ SBC и SBc лежатъ въ одной плоскости, заключаемъ, что $\frac{SABC}{SABc}=\frac{SBC}{SBc}$. Но треугольники SBC и SBc имѣютъ общую вершину B, слѣдов. $\frac{SBC}{SBc}=\frac{SC}{Sc}$, а потому

$$\frac{SABC}{SABc}=\frac{SC}{Sc}.$$

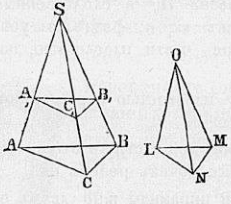
Далѣе, треугольныя пирамиды $SABc$ и $Sabc$ имѣютъ общую вершину c, а основанія ихъ ABS и abS лежатъ въ одной плоскости, слѣдов. $\frac{SABc}{Sabc}=\frac{ABS}{abS}$. Но такъ какъ треугольники ABS и abS имѣютъ бщій уголъ ASB, то $\frac{ABC}{abc}=\frac{SA.SB}{Sa.Sb}$ и потому

$$\frac{SABC}{Sabc}=\frac{SA.SB}{Sa.Sb}.$$

Умноживъ это уравненіе на предъидущее, найдемъ

$$\frac{SABC}{Sabc}=\frac{SA\ SB\ .SC}{Sa\ .\ Sb\ \ Sc}.$$

§ 275. Теорема. *Объемы двухъ подобныхъ четырегранниковъ относятся какъ кубы сходственныхъ реберъ.*



Черт. 307.

Пусть будутъ $SABC$ и $OLMN$ (черт. 307) два подобныхъ четырегранника требуется доказать, что $\frac{SABC}{OLMN}=\frac{SA^3}{OL^3}$.

Доказ. Въ подобныхъ четырегранникахъ $SABC$ и $OLMN$ трегранные углы S и O равны, слѣдов. (§ 274) $\frac{SABC}{OLMN}=\frac{SA.SB.SC}{OL.OM.ON}$; но такъ какъ сходственныя ребра пропорціональны, то $\frac{SA}{OL}=\frac{SB}{OM}=\frac{SC}{ON}$, и потому

$$\frac{SABC}{OLMN}=\frac{SA^3}{OL^3}.$$

§ 276. Теорема. *Объемы двухъ подобныхъ многогранниковъ относятся какъ кубы сходственныхъ реберъ.*

Доказ. Раздѣливъ подобные многогранники на подобные и одинаково расположенные четырегранники (§ 254), означивъ объемы ихъ соотвѣтственно чрезъ V_1 V_2 V_3.. и v_1 v_2 v_3.. и чрезъ A и a два какихъ нибудь сходствен ребра, находимъ (§ 275):

$$\frac{V_1}{v_1} = \frac{V_2}{v_2} = \frac{V_3}{v_3} \; \dots = \frac{A^3}{a^3}\,;$$

слѣдов.

$$\frac{V_1 + V_2 + V_3 \dots}{v_1 + v_2 + v_3 \dots} = \frac{A^3}{a^3}\,.$$

Задачи.

233. Опредѣлить сторону куба равновеликаго параллелепипеду, котораго измѣренія 80, 40 и 20.

224. Опредѣлить объемъ воздуха, заключеннаго въ прямоугольной комнатѣ, которой длина 30,42 ф., ширина 28, 30 ф. а высота 14, 15 ф.

235. Прямоугольный бассейнъ, длиною въ 6, 5 ф., шириною въ 4, 4 ф. и глубиною въ 2,7 ф., наполненъ водою до $\frac{2}{3}$ высоты; сколько кубическихъ футовъ воды содержится въ немъ.

236. Найдти объемъ и боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, высота которой H, равна 63 а радіусъ R круга, описаннаго около основанія которой, равенъ 17.

237. Высота усѣченной пирамиды равна H, а сходственныя стороны ея основаній относятся какъ m: n; раздѣлить усѣченную пирамиду на двѣ равновеликія части плоскостью, параллельною основаніямъ.

238. Раздѣлить пополамъ пирамиду плоскостью параллельной основанію.

239. Раздѣлить пирамиду $SABC$ на двѣ части въ отношеніи m: n плоскостью, проходящею чрезъ одно изъ реберъ ея.

240. По данной высотѣ H усѣченной пирамиды и по двумъ ея основаніямъ B и b опредѣлить объемъ полной пирамиды и отсѣченной части ея.

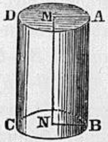
ГЛАВА V.

О тѣлахъ круглыхъ.

О цилиндрѣ и конусѣ. О шарѣ. О сферическомъ треугольникѣ. Подобіе круглыхъ тѣлъ. Коническія сѣченія. Задачи.

О цилиндрѣ и конусѣ.

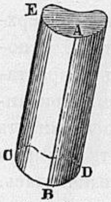
§ 277 Если прямоугольникъ $ABNM$ (черт. 324) будемъ обращать около одной изъ его сторонъ NM, которая будетъ оставаться неподвижною, то образуется тѣло $ABCD$, называемое *прямымъ круглымъ цилиндромъ*. Неподвижная сторона NM называется *осью*, сторона $AБ$ — *образующею линіею*, круги, описанные сторонами MA и NB, — *основаніями*, а разстояніе между ними, т. е. длина оси, — *высотою* цилиндра.



Черт. 324.

Можно также образовать прямой круглый цилиндръ движеніемъ прямой AB (черт. 324), конецъ которой B скользилъ бы по окружности круга, между тѣмъ какъ она сама оставалась бы перпендикулярною къ плоскости круга.

Цилиндрическою поверхностью вообще называютъ поверхность (черт. 325), образованную движеніемъ прямой AB, конецъ которой B скользитъ по какой нибудь кривой линіи BDC, между тѣмъ какъ она перемѣщается параллельно самой себѣ. Но въ элементарной Геометріи изъ всѣхъ цилиндрическихъ поверхностей разсматривается только поверхность прямаго круглаго цилиндра, а



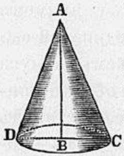
Черт. 325.

потому въ элементарной Геометріи его просто называютъ цилиндромъ.

§ 278. Если въ основаніе цилиндра впишемъ, а около него опишемъ правильные многоугольники и примемъ ихъ за основанія прямыхъ призмъ, одинакой высоты съ цилиндромъ, то, очевидно, объемъ цилиндра будетъ меньобъема описанной и больше объема вписанной призмы. При увеличеніи же числа сторонъ многоугольниковъ разность между объемами описанной и вписанной призмы безпредѣльно уменьшается и можетъ быть сдѣлана меньше всякой величины. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ H высота цилиндра, B и b площади основаній описанной и вписанной призмы, тогда разность объемовъ двухъ призмъ будетъ $H(B-b)$. По мѣрѣ увеличенія числа сторонъ многоугольниковъ, разность $B-b$ безпредѣльно уменьшается (§ 174), а потому и $H(B-b)$ будетъ безпредѣльно уменьшаться. Такъ какъ объемъ цилиндра больше объема вписанной и меньше объема описанной призмы, то съ увеличеніемъ числа сторонъ многоугольниковъ, описанная и вписанная призмы безпредѣльно приближаются къ цилиндру, и потому *цилиндръ есть предѣлъ вписанныхъ и описанныхъ призмъ*.

Означимъ чрезъ P и p периметры описаннаго и вписаннаго многоугольниковъ; поверхность описанной призмы будетъ PH, поверхность вписанной — ph. Съ увеличеніемъ числа сторонъ многоугольниковъ P уменьшается, а p увеличивается (§§ 131, 132), слѣд. поверхность описанной призмы будетъ уменьшаться, а поверхность вписанной—увеличиваться. Но съ возрастаніемъчисла сторонъ многоугольниковъ, призмы приближаются къ совпаденію съ цилиндромъ, слѣд. поверхность описанной призмы приближается къ поверхности цилиндра уменьшаясь, а поверхность вписанной — увеличиваясь. Это значитъ, что поверхность цилиндра меньше поверхности описанной и больше поверхности вписанной призмы. Разность же между поверхностями двухъ призмъ можетъ быть сдѣлана менѣе всякой величины, потому, что эта разность равна $H(P-p)$, а $P-p$ безпредѣльно уменьшается съ возрастаніемъ числа сторонъ многоугольниковъ (§ 175). Изъ этого мы заключаемъ, что поверхность цилиндра больше поверхности вписанной и меньше поверхности описанной призмы, и что разность между поверхностями цилиндра и призмъ можетъ быть сдѣлана меньше всякой величины. И такъ *поверхность цилиндра есть предѣлъ поверхностей вписанныхъ и описанныхъ призмъ*.

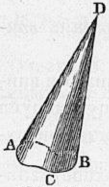
§ 279. Прямоугольный треугольникъ ABC (черт. 326), обращаясь около одного изъ своихъ катетовъ AB, который остается неподвижнымъ, образуетъ тѣло ADC, называемое *прямымъ круглымъ конусомъ*. Неподвижная сторона AB называется *осью* и также *высотою*, сторона AC — *образующею линіею*, кругъ DC, описанный движеніемъ катета BC,—*основаніемъ*, а точка A—*вершиною* конуса.



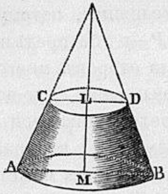
Черт. 326.

Можно также образовать прямой круглый конусъ движеніемъ прямой AC, одинъ конецъ которой скользилъ бы по окружности круга, между тѣмъ какъ другой конецъ A оставался бы неподвижнымъ на перпендикулярѣ, возставленномъ къ кругу въ центрѣ его.

Коническою поверхностію вообще (черт. 327) называютъ поверхность, образованную движеніемъ прямой DA, которой одинъ конецъ D остается неподвижнымъ, между тѣмъ какъ другой конецъ A скользитъ по какой нибудь кривой ABC. Но въ элементарной Геометріи изъ всѣхъ коническихъ поверхностей разсматривается только поверхность прямаго круглаго конуса, а потому въ элементарной Геометріи его просто называютъ конусомъ.



Черт. 327.



Черт. 328.

Если пересѣчемъ конусъ плоскостью, параллельной основанію, то получится тѣло $ABDC$ (черт. 328), которое называется *усѣченнымъ конусомъ*. Очевидно, что усѣченный конусъ можно также образовать, обращая трапецію $MBDL$ около стороны ея ML, къ которой параллельныя стороны перпендикулярны. Круги, описанные сторонами MB и LD, называются *основаніями*, разстояніе между ними— *высотою*, а линія DB — *образующею линіею*.

§ 280. Если въ основаніе конуса впишемъ и около него опишемъ правильные многоугольники и примемъ ихъ за основанія правильныхъ пирамидъ, одинакой высоты съ конусомъ, то очевидно, что объемъ конуса будетъ меньше объема описанной и больше объема вписанной пирамиды. При увеличеніи же числа сторонъ многоугольниковъ разность между объемами двухъ пирамидъ безпредѣльно уменьшается. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ H высота конуса, B и b площади основаній описанной и вписанной пиримидъ, тогда разность объемовъ двухъ пирамидъ будетъ $\frac{H}{3}(B-b)$. Но такъ какъ съ увеличеніемъ числа сторонъ многоугольниковъ разность $B-b$ безпредѣльно уменьшается, то и разность $\frac{H}{3}(B-b)$ можетъ быть сдѣлана менѣе всякой величины. Изъ этого слѣдуетъ, что *конусъ есть предѣлъ вписанныхъ и описанныхъ пирамидъ*.

Означимъ чрезъ P и p периметры описаннаго и вписаннаго многоугольниковъ, чрезъ l образующую конуса и чрезъ h апоѳему вписанной пирамиды, тогда поверхность описанной пирамиды будетъ $\frac{Pl}{2}$, а поверхность вписанной $\frac{ph}{2}$. Съ возрастаніемъ числа сторонъ многоугольниковъ, P уменьшается, а p увеличивается; также увеличивается и апоѳема h, потому что разстояніе ея отъ оси конуса возрастаетъ; изъ этого слѣдуетъ, что поверхность описанной пирамиды будетъ уменьшаться, а поверхность вписанной увеличиваться. Но такъ какъ съ возрастаніемъ числа сторонъ многоугольниковъ описанныя и вписанныя пирамиды приближаются къ совпаденію съ конусомъ, то поверхность описанной пирамиды приближается къ ней, уменьшаясь, а поверхность вписанной—увеличиваясь; это значитъ, что поверхность конуса меньше поверхности описанной и больше поверхности вписанной пирамиды.

Замѣтимъ, что разность между поверхностями описанной и вписанной пирамиды можетъ быть сдѣлана менѣе всякой величины. Въ самомъ дѣлѣ, эта разность равняется $\frac{Pl}{2}-\frac{ph}{2}$; но $Pl-ph=l(P-p)+p(l-h)$, а такъ какъ разности $P-p$ и $h-l$, при увеличеніи числа сторонъ многоугольниковъ, безпредѣльно уменьшаются, то разность $\frac{Pl}{2}-\frac{ph}{2}$ можетъ быть сдѣлана менѣе всякой величины.

Изъ этого слѣдуетъ, что *поверхность конуса есть предѣлъ поверхностей вписанныхъ и описанныхъ пирамидъ*.

Очевидно, что усѣченный конусъ будетъ предѣлъ вписанныхъ и описанныхъ усѣченныхъ пирамидъ.

§ 281. Теорема. *Боковая поверхность цилиндра равняется произведенію окружности его основанія на высоту.*

Доказ. Это предложеніе слѣдуетъ изъ того, что поверхность цилиндра есть предѣлъ вписанныхъ и описанныхъ призмъ.

Положимъ, что P есть поверхность цилиндра, O—окружность основанія и H высота его; тогда (§ 231 слѣдствіе 1) $P = O.H$.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что боковая поверхность цилиндра равняется площади прямоугольника, котораго высота есть высота цилиндра, а основаніе равно окружности его основанія.

Если означимъ чрезъ R радіусъ основанія цилиндра и замѣтимъ, что $O = 2\pi R$, то находимъ $P = 2\pi RH$.

Полная же поверхность цилиндра, т. е. боковая поверхность его, сложенная съ площадями двухъ его основаній, будетъ $2\pi RH + 2\pi R^2$.

§ 282. Теорема. *Объемъ цилиндра равняется произведенію площади его основанія на высоту.*

Доказ. Это предложеніе слѣдуетъ изъ того, что объемъ цилиндра есть предѣлъ объемовъ вписанныхъ и описанныхъ призмъ.

Пусть будутъ V, B и H объемъ, площадь основанія и высота цилиндра, тогда (§ 267 слѣдствіе 1) $V = B.H$.

Если означимъ радіусъ основанія цилиндра чрезъ R и замѣтимъ, что $B = \pi R^2$, то находимъ $V = \pi R^2 H$.

§ 283. Теорема. *Боковая поверхность конуса равняется ½ произведенію окружности его основанія на образующую линію.*

Доказ Это предложеніе слѣдуетъ изъ того, что поверхность конуса есть предѣлъ поверхностей вписанныхъ и описанныхъ пирамидъ.

Пусть будутъ P, O и l поверхность, окружность основанія и образующая линія конуса, тогда (§ 235) $P = \frac{O.l}{2}$.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что боковая поверхность конуса равняется площади треугольника, котораго высота есть образующая линія, а основаніе равняется длинѣ окружности основанія конуса.

Если означимъ чрезъ R радіусъ основанія и замѣтимъ, что $O = 2\pi R$, то найдемъ $P = \pi R.l$. Полная поверхность конуса, т. е. боковая его поверхность, сложенная съ площадью его основанія, равняется $\pi Rl + \pi R^2$.

§ 284. Теорема. *Боковая поверхность усѣченнаго конуса равняется полусуммѣ окружностей его основаній, умноженной на образующую линію.*

Доказ. Это предложеніе слѣдуетъ изъ того, что поверхность усѣченнаго конуса есть предѣлъ поверхностей вписанныхъ и описанныхъ усѣченныхъ пирамидъ.

Такъ какъ поверхность усѣченной пирамиды равняется также периметру средняго сѣченія, умноженному на апоѳему (§ 236); то поверхность усѣченнаго конуса равняется также *произведенію окружности средняго сѣченія на образующую.*

Если означимъ чрезъ R и r радіусы нижняго и верхняго основаній усѣченнаго конуса и чрезъ l его образующую, то боковая поверхность будетъ равняться $\frac{(2\pi R + 2\pi r)\, l}{2}$, или $\pi (R + r)\, l$.

§ 285. Теорема. *Объемъ конуса равняется произведенію площади его основанія на треть высоты.*

Доказ. Это предложеніе слѣдуетъ изъ того, что конусъ есть предѣлъ вписанныхъ и описанныхъ пирамидъ.

Пусть будетъ V, B и H объемъ, площадь основанія и высота конуса, тогда (§ 270) $V = \frac{B.H}{3}$.

Если означимъ радіусъ основанія конуса чрезъ R, и замѣтимъ, что $B = \pi R^2$, то находимъ $B = \frac{\pi R^2 H}{3}$.

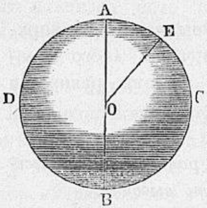
§ 286. ТЕОРЕМА. *Объемъ усѣченнаго конуса равенъ объему трехъ конусовъ, имѣющихъ высоту общую съ усѣченнымъ, а основанія: первый—нижнее, второй—верхнее основаніе усѣченнаго конуса, а третій—среднее пропорціональное между ними.*

Доказ. Это предложеніе слѣдуетъ изъ того, что усѣченный конусъ есть предѣлъ вписанныхъ и описанныхъ усѣченныхъ пирамидъ.

Если означимъ чрезъ R и r радіусы нижняго и верхняго основаній усѣченнаго конуса, чрезъ H его высоту и замѣтимъ, что среднее пропорціональное между площадями нижняго и верхняго основаній равняется $\sqrt{\pi R^2 . \pi r^2} = \pi Rr$, то заключаемъ, что объемъ усѣченнаго конуса будетъ $\pi \frac{(R^2 + r^2 + Rr)}{3}$.

О шарѣ.

§ 287. Полукругъ ACB (черт. 329), обращаясь около своего діаметра AB, который остается неподвижнымъ, образуетъ тѣло $ACBD$, которое называется *шаромъ* или *сферою*. Точка O, равно отстоящая отъ всѣхъ точекъ поверхности шара, называется *центромъ*, линія, соединяющая центръ съ какой нибудь точкою поверхности шара, — *радіусомъ*, а линія проходящая чрезъ центръ и соединяющая двѣ точки поверхности, — *діаметромъ* шара

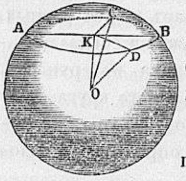


Черт. 329.

Такъ какъ всѣ радіусы шара равны, то *шаръ есть тѣло, ограниченное поверхностью, всѣ точки которой находятся на равномъ разстояніи отъ одной внутренней точки.*

Цилиндръ, конусъ и шаръ называются круглыми тѣлами.

§ 288. ТЕОРЕМА. *Всякое сѣченіе шара плоскостью есть кругъ.*



Черт. 330.

Пусть будетъ AB (черт. 330) сѣченіе шара какой-нибудь плоскостью; требуется доказать, что это сѣченіе есть кругъ.

Доказ. Опустимъ изъ центра O перпендикуляръ OK на сѣченіе AB и соединимъ основаніе перпендикуляра K съ точками C, B, D линіи сѣченія Прямоугольные треугольники CKO, BKO, DKO равны, потому что имѣютъ общій катетъ OK и кромѣ того гипотенузы ихъ, какъ радіусы шара, равны; слѣд. $KC = KB = KD$. Изъ этого слѣдуетъ, что точки линіи сѣченія находятся на равномъ разстояніи отъ точки K, а потому эта линія есть окружность, которой центръ совпадаетъ съ основаніемъ перпендикуляра.

Если разстояніе плоскости сѣченія отъ центра шара, т. е. длину линіи OK, означимъ чрезъ K, радіусъ шара чрезъ R, а радіусъ сѣченія чрезъ r, то $r = \sqrt{R^2 - K^2}$.

Изъ этого слѣдуетъ:

1. Сѣченія, равно отстоящія отъ центра, равны.

2. Изъ двухъ не равныхъ сѣченій то, которое имѣетъ большій радіусъ, ближе къ центру.

3. Сѣченіе, проходящее чрезъ центръ шара, больше всякаго другаго сѣченія. Вслѣдствіе этого кругъ, образованный сѣченіемъ, проходящимъ чрезъ центръ, называется *большимъ кругомъ*, а кругъ, образованный сѣченіемъ, не проходящимъ чрезъ центръ,—*малымъ кругомъ*

§ 289. Такъ какъ большой кругъ есть сѣченіе, проходящее чрезъ центръ шара, то:

1. Радіусъ большаго круга равенъ радіусу шара.

2. Два большихъ круга дѣлятся пополамъ, потому что линія, по которой они пересѣкаются, проходитъ чрезъ

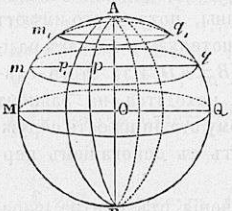
ихъ общій центръ и будетъ по этому общимъ ихъ діаметромъ.

3. Всякій большой кругъ дѣлитъ шаръ на двѣ равныя части, потому что эти части при наложеніи совпадаютъ.

4. Чрезъ каждыя двѣ точки, взятыя на поверхности шара, можно провести окружность большаго круга.

Очевидно, что двѣ точки на поверхности шара, не лежащія съ центромъ на одной прямой, опредѣляютъ положеніе большаго круга.

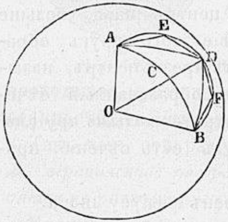
Когда шаръ разсматривается какъ тѣло, происшедшее отъ обращенія круга $AQBM$ (черт. 331) около діаметра AB, то діаметръ AB называется *осью* шара, два конца его A и B—*полюсами*, большой кругъ MQ, перпендикулярный къ оси, — *экваторомъ*, а малыя круги mq, m_1q_1..., перпендикулярные къ оси,—*параллелями,* наконецъ большіе круги ApB, Ap_1B..., проходящіе чрезъ ось,—*меридіанами.* (*)



Черт. 331.

§ 290. **Теорема.** *Кратчайшее разстояніе двухъ точекъ на поверхности шара есть дуга большаго круга, соединяющая эти точки.*

Положимъ, что A и B (ч. 332) суть какія-нибудь двѣ точки на поверхности шара, ACB дуга большаго круга, проходящаго чрезъ эти точки, и $AEDFB$ какая-нибудь линія на поверхности шара, соединяющая тѣже точки; требуется доказать, что дуга $ACB <$ дуги $AEDFB$.



Черт. 332.

(*) Замѣч. Эти названія заимствованы изъ Географіи.

Доказ. Проведемъ чрезъ точки A, B и какую-нибудь точку D линіи $AEDFB$ дуги большихъ круговъ AD и BD. Если соединимъ точки A, B и D съ центромъ шара O, то составится тригранный уголъ $OABD$, котораго плоскіе углы AOB, AOD и BOD измѣряются дугами AB, AD и BD; а такъ какъ во всякомъ трегранномъ углѣ одинъ изъ его плоскихъ угловъ менѣе суммы двухъ другихъ (§ 215), то $AB < AD + DB$. Далѣе соединимъ дугами большихъ круговъ: точку D съ какой-нибудь точкою E линіи AED и точки E и D съ точкою A; также соединимъ D съ какой-нибудь точкою F линіи DFB и точки D и F съ точкою B; находимъ: $AD < AE + ED$ и $DB < DF + FB$. Разсуждая такимъ образомъ далѣе, заключаемъ, что линія $AEDFB$ будетъ предѣломъ линіи, составленной изъ дугъ большихъ круговъ; а какъ послѣдняя больше дуги ACB, то линія $AEDFB$, соединяющая точки A и B, будетъ больше дуги большаго круга ACB, соединяющей тѣже точки.

§ 291. Плоскость, имѣющая съ поверхностью шара только одну общую точку, называется *касательною плоскостью*, а общая ихъ точка — *точкою касанія.*

Теорема. *Радіусъ, проведенный въ точку касанія, перпендикуляренъ къ касательной плоскости.*

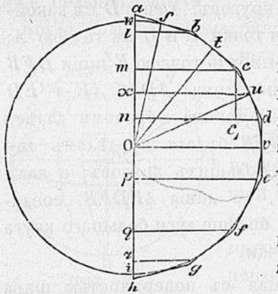
Доказ. Линія, соединяющая центръ съ точкою касанія, короче линій, соединяющихъ центръ съ другими точками касательной плоскости, а кратчайшее разстояніе точки отъ плоскости есть перпендикуляръ (§ 194).

Обратная теорема. Всякая плоскость, перпендикулярная къ концу радіуса, есть касательная плоскость.

Доказ. Плоскость, перпендикулярная къ концу радіуса, другой точки общей съ поверхностью шара имѣть не можетъ, потому что, въ противномъ случаѣ, соединивъ эту точку съ центромъ шара, получили бы наклонную равную перпендикуляру.

Линіи, проведенныя въ касательной плоскости чрезъ точку касанія, имѣютъ также одну только общую точку съ поверхностью шара; эти линіи называются поэтому *касательными линіями.*

§ 292. Теорема. *Поверхность шара равняется произведенію окружности большаго круга на діаметръ.*



Черт. 333.

Доказ. Положимъ, что около полукруга *kluvi* (черт. 333) описана половина правильнаго многоугольника *abcdefgh*, имѣющаго четное число сторонъ. При обращеніи полукруга вмѣстѣ съ многоугольникомъ около діаметра *ki*, полукругъ образуетъ шаръ, а полумногоугольникъ — тѣло, состоящее:

1) Изъ двухъ полныхъ конусовъ, образованныхъ линіями *ab* и *gh*;

2) Изъ ряда усѣченныхъ конусовъ, образованныхъ линіями *bc*, *dc*...;

3) Изъ цилиндра, образованнаго линіею *de*, если предположимъ, что эта линія параллельна діаметру *ki*.

Поверхность конуса, образованнаго линіею *ab*, равняется (§ 283) $2\pi\, lb.\, \frac{ab}{2} = 2\pi\, lb.\, as$. Если соединимъ точку *s* съ центромъ *O*, означимъ радіусъ шара чрезъ *R* и замѣтимъ, что прямоугольные треугольники *asO* и *bla*, имѣющіе общій уголъ *a*, подобны, то найдемъ $\frac{sa}{sO} = \frac{al}{lb}$, или $lb.\, as = R.\, al$; по этому поверхность разсматриваемаго конуса равняется $2\pi\, R\, .\, al$; но $2\pi R$ есть окружность большаго круга, а *al* высота конуса, слѣд. эта поверхность равняется: *окружности большаго круга умноженной на высоту конуса.*

Поверхность усѣченнаго конуса, образованнаго обращеніемъ какой нибудь изъ сторонъ многоугольника, напр. стороны *cd*, по § 284, равна $2\pi\ ux.\ cd$. Соединивъ точку *u* съ центромъ и опустивъ изъ точки *c* перпендикуляръ на линію *nd*, составимъ два прямоугольныхъ треугольника *uxO* и dcc_1, которые подобны между собою, потому что стороны ихъ взаимно перпендикулярны, слѣд. $\frac{ux}{uO} = \frac{cc_1}{cd}$ или $ux.\ cd = R.\ cc_1$. Поэтому поверхность разсматриваемаго усѣченнаго конуса равняется $2\pi R.\ cc_1$; а такъ какъ cc_1 есть высота усѣченнаго конуса, то поверхность его также равняется *окружности большаго круга, умноженной на высоту его.*

Наконецъ предположивъ, что линія *de* параллельна діаметру *ki*, найдемъ, что поверхность цилиндра, ею образованнаго, равняется $2\pi\ pe.\ de$ (§ 281); но $pe = Ou = R$, слѣдов. поверхность разсматриваемаго цилиндра равняется также *окружности большаго круга, умноженной на высоту его.*

Изъ сказаннаго мы заключаемъ, что поверхность, образованная обращеніемъ многоугольника *abcdefgh*, состоитъ изъ частей, изъ которыхъ каждая равняется произведенію ея высоты на окружность большаго круга; слѣдов. сумма всѣхъ этихъ поверхностей равняется окружности большаго круга, умноженной на сумму ихъ высотъ, т. е. на линію *ah*.

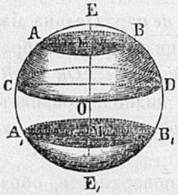
При увеличеніи числа сторонъ, многоугольникъ безпредѣльно приближается къ кругу, а потому поверхность шара будетъ предѣломъ поверхности, образованной чрезъ обращеніе многоугольника. Замѣтивъ при томъ, что линія *ah* съ возрастаніемъ числа сторонъ безпредѣльно приближается къ діаметру *ki*, заключаемъ, что поверхность шара равняется окружности большаго круга, умноженной на діаметръ.

Такъ какъ окружность большаго круга равна $2\pi R$, то поверхность шара выразится чрезъ $4\pi R^2$.

Замѣтивъ, что πR^2 означаетъ площадь большаго круга, заключаемъ, что поверхность шара равняется также *четыремъ площадямъ большаго круга.*

Если поверхности двухъ шаровъ означимъ чрезъ P и p, а радіусы ихъ чрезъ R и r, то $P=4\pi R^2$ и $p=4\pi r^2$, слѣдов. $\frac{P}{p}=\frac{R^2}{r^2}$, т. е. *поверхности шаровъ относятся какъ квадраты ихъ радіусовъ.*

§ 293. Часть $ACDB$ (черт. 334) поверхности шара, заключенная между двумя параллельными кругами AB и CD, называется *шаровымъ поясомъ* или *зоною*; параллельные круги AB и CD называются *основаніями*, а разстояніе между ними — *высотою* пояса.



Черт. 334.

Изъ сказаннаго при опредѣленіи поверхности шара слѣдуетъ, что *поверхность шароваго пояса равняется произведенію ея высоты на окружность большаго круга.*

Если означимъ высоту пояса чрезъ H и радіусъ шара чрезъ R, то поверхность пояса выразиться чрезъ $2\pi RH$.

Часть $A_1E_1B_1$ (чер. 334) поверхности шара, отсѣченная плоскостью A_1B_1, называется *отрѣзкомъ* или *сегментомъ* шаровой поверхности, а E_1M, часть радіуса перпендикулярнаго къ плоскости сѣченія A_1B_1, называется *высотою* отрѣзка.

Изъ сказаннаго при опредѣленіи поверхности шара слѣдуетъ, что *поверхность шароваго сегмента равняется произведенію его высоты на окружность большаго круга.*

Если означимъ высоту сегмента чрезъ H и радіусъ шара чрезъ R, то поверхность сегмента выразится чрезъ $2\pi R.\ H$.

§ 294. Теорема. *Объемъ шара равняется произведенію его поверхности на треть радіуса.*

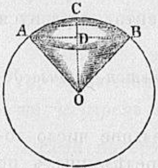
Доказ. Вообразивъ на шарѣ значительное число точекъ, приблизительно равномѣрно распредѣленныхъ по всей поверхности его, и чрезъ каждую точку касательную плоскость, получимъ многогранникъ описанный около шара, который съ увеличеніемъ числа точекъ, общихъ съ шаромъ, безпредѣльно къ нему приближается. Если же соединимъ центръ шара со всѣми вершинами многогранника, то многогранникъ раздѣлится на пирамиды, которыя имѣютъ общую высоту, равную радіусу шара, а основанія — стороны многогранника. Объемъ всякой пирамиды равняется произведенію основанія на треть высоты, а потому объемъ многогранника будетъ равняться произведенію его поверхности на треть радіуса. Изъ этого слѣдуетъ, что объемъ шара равняется произведенію его поверхности на треть радіуса.

Означивъ радіусъ шара чрезъ R и замѣтивъ, что поверхность его равняется $4\pi R^2$, найдемъ, что объемъ шара равняется $4\pi R^2.\ \frac{R}{3}$ или $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Если означимъ діаметръ шара чрезъ D и замѣтимъ, что $R^3=\left(\frac{D}{2}\right)^3=\frac{D^3}{8}$, то найдемъ, что поверхность шара равняется $\frac{\pi D^3}{6}$.

Пусть будутъ V и v объемы двухъ шаровъ, R и r ихъ радіусы; тогда $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ и $v=\frac{4}{3}\pi r^3$, слѣд. $\frac{V}{v}=\frac{R^3}{r^3}$, т. е. *объемы шаровъ относятся какъ кубы ихъ радіусовъ.*

§ 295. Часть шара *AOBC* (черт. 335), ограниченная сегментомъ *ACB* и коническою поверхностью *AOB* имѣющею вершину въ центрѣ шара, называется *сферическимъ вырѣзкомъ* или *секторомъ*. Очевидно, что сферическій секторъ можно разсматривать какъ тѣло, происшедшее отъ обращенія круговаго сектора *BOC* около радіуса *CO*.

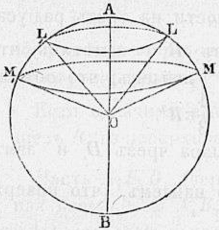


Черт. 335.

Изъ сказаннаго при опредѣленіи объема шара слѣдуетъ, что *объемъ сферическаго сектора равенъ поверхности шароваго сегмента ACB', умноженной на треть радіуса.*

Если означимъ чрезъ *V* объемъ сферическаго сектора, чрезъ *H* высоту сегмента *ACB* и чрезъ *R* радіусъ шара и замѣтимъ, что поверхность сегмента равняется $2\pi RH$ (§ 293), то найдемъ, что объемъ сферическаго сектора равняется $\frac{2}{3}\pi R^2 H$.

§ 296. *Сферическимъ секторомъ*, въ смыслѣ болѣе общемъ нежели въ предъидущемъ §, называется тѣло $MLOL_1M_1$ (черт. 336), образованное чрезъ обращеніе круговаго сектора *LOM* около діаметра *AB*. Описанный при этомъ дугою *LM* поясъ LL_1M_1M называется *основаніемъ* сектора.



Черт. 336.

Изъ сказаннаго при опредѣленіи поверхности шара слѣдуетъ, что объемъ сферическаго сектора равняется произведенію его основанія на треть радіуса шара. Если означимъ высоту его основанія чрезъ *H* (§ 293), радіусъ шара чрезъ *R* и замѣтимъ, что поверхность пояса LL_1M_1M равняется $2\pi RH$, то найдемъ, что объемъ сферическаго сектора равняется $\frac{2}{3}\pi R^2 H$.

Когда одинъ изъ радіусовъ круговаго сектора *LOM* совпадаетъ съ радіусомъ *OA*, то сферической секторъ принимаетъ видъ сферическаго сектора предъидущаго §.

§ 297. Часть шара LMM_1L_1 (черт. 336), содержащаяся между двумя параллельными сѣченіями LL_1 и MM_1, называется *сферическимъ слоемъ*, параллельныя сѣченія LL_1 и MM_1 называются *основаніями* слоя, а разстояніе между ними — его *высотою*.

Для опредѣленія объема сферическаго слоя LMM_1L_1 замѣтимъ, что онъ равняется сферическому сектору $LMOM_1L_1$, сложенному съ конусомъ LOL_1, безъ конуса MOM_1. Если означимъ объемъ сферическаго слоя чрезъ *V*, его высоту чрезъ *H*, радіусъ шара чрезъ *R* и перпендикуляръ, опущенный изъ центра на плоскость LL_1, чрезъ *K*, то радіусъ круга LL_1 будетъ $\sqrt{R^2-K^2}$, а радіусъ круга MM_1 будетъ $\sqrt{R^2-(K-H)^2}$; слѣдов объемъ конуса LOL_1 равенъ $\frac{\pi(R^2-K^2)K}{3}$, а объемъ конуса MOM_1 равенъ $\frac{\pi\,|R^2-(K-H)^2|\,|K-H|}{3}$; а такъ какъ объемъ сферическаго сектора $LMOL_1M_1$ равенъ $\frac{2}{3}\pi R^2H$ (§ 296), то

$$V=\frac{2\pi R^2H+\pi(R^2-K^2)K-\pi\,|R^2-(K-H)^2|\,|K-H|}{3},$$

и, по сокращеніи,

$$V=\pi H(R^2-K^2+KH)-\frac{\pi H^3}{3}.$$

Это выраженіе можно представить въ другомъ видѣ, введя вмѣсто *R* и *K* радіусы двухъ основаній слоя. Пусть будутъ r_1 и r радіусы основаній LL_1 и MM_1. Замѣтивъ, что $R^2=r_1^2+K^2=r^2+(K-H)^2$, находимъ:

$$K.\,H=\frac{r^2-r_1^2+H^2}{2},$$

а такъ какъ $R^2-K^2=r_1^2$, то

$$V=H\,\frac{\pi r^2+\pi r_1^2}{2}+\frac{\pi H^3}{6},$$

т. е. *объемъ слоя равняется полусуммѣ его основаній, умноженной на высоту и сложенной съ объемомъ шара, имѣющаго эту высоту діаметромъ*

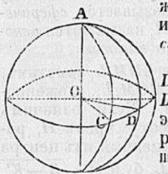
§ 298. Часть шара *ACB* (черт. 335), отсѣченная плоскостью *AB*, называется *сферическимъ отрѣзкомъ* или *сегментомъ*; *CD*, часть радіуса перпендикулярнаго къ плоскости сѣченія *AB*, называется *высотою* отрѣзка.

Очевидно, что принимая радіусъ верхняго основанія шароваго слоя равнымъ нулю, получимъ отрѣзокъ шара; слѣдов. положивъ $r_1=o$ въ выраженіи предъидущаго §, найдемъ.

$$V=\frac{\pi Hr^2}{2}+\frac{\pi H^3}{6},$$

т. е. *объемъ шароваго отрѣзка равняется половинѣ объема цилиндра одинакой высоты и одинакаго основанія съ отрѣзкомъ, сложенной съ объемомъ шара, имѣющаго его высоту діаметромъ.*

§ 299 Часть шаровой поверхности *ADBC* (черт 337), содержащаяся между двумя полуокружностями *ADB* и *ACB* большихъ круговъ, называется *двусторонникомъ*.



Черт. 337.

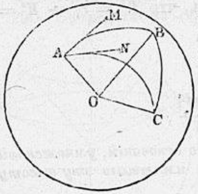
Построимъ въ центрѣ шара линейный уголъ *DOC* двуграннаго угла *DBAC* и положимъ, что *DC* есть дуга большаго круга, служащая мѣрою этого угла; *DC* называется *дугою* двусторонника. Очевидно, что *DC* есть дуга большаго круга перпендикулярнаго къ діаметру *AB*.

Означимъ поверхность двусторонника чрезъ *S*, дугу его чрезъ *a* и радіусъ шара чрезъ *R*. Замѣтимъ, что поверхность двусторонника относится къ поверхности шара, какъ дуга двусторонника къ окружности большаго круга, найдемъ $\frac{S}{4\pi R^2}=\frac{a}{2\pi R^2}$, и отсюда $S=2R.a$, т. е. *поверхность двусторонника равняется произведенію его дуги на діаметръ шара.*

Когда дуга двусторонника равняется четверти окружности, то двусторонникъ называется *прямымъ*. Очевидно, что поверхность прямаго двусторонника равна πR^2.

О сферическомъ треугольникѣ.

§ 300. Возьмемъ на поверхности шара (черт. 338) три какія нибудь точки *A*, *B*, *C* и проведемъ чрезъ нихъ дуги большихъ круговъ. Часть поверхности шара, ограниченная тремя дугами *AB*, *BC* и *AC*, называется *сферическимъ треугольникомъ*, дуги *AB*, *BC* и *AC* называютя *сторонами* треугольника. Въ точкѣ *A* проведемъ касательныя *AM* и *AN* къ дугамъ *AB* и *AC*; уголъ *MAN*, составленный этими касательными, принимается за уголъ сферическаго треугольника между его сторонами *AB* и *AC*. Уголъ сферическаго треугольника, заключающійся между его сторонами *AB* и *AC*, означается или одной буквою *A* или тремя буквами *BAC*.



Черт. 338.

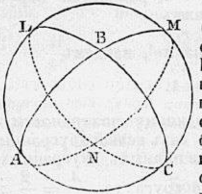
Соединивъ точки *A*, *B* и *C* съ центромъ шара *O*, составимъ триграный уголъ *OABC*, котораго плоскіе углы *AOB*, *BOC* и *COA* измѣряются дугами, а двугранные углы — углами сферическаго треугольника Въ самомъ дѣлѣ, вершина плоскихъ угловъ *AOB*, *BOC*, и *COA* находится въ центрѣ, и потому эти углы измѣряются дугами *AB*, *BC* и *CA*. Стороны же *AM* и *AN* угла *MAN* перпендикулярны къ радіусу *OA* и лежатъ соотвѣтственно въ плоскостяхъ *BAO* и *CAO*, слѣдов. *MAN* есть линейный уголъ двуграннаго *BAOC*.

§ 301. Такъ какъ, по предъидущему §, стороны и углы сферическаго треугольника. суть мѣры плоскихъ и двугранныхъ угловъ триграннаго, котораго вершина находится въ центрѣ, то изъ этого слѣдуетъ:

1. Каждая сторона сферическаго треугольника менѣе суммы двухъ другихъ сторонъ (§ 215).
2. Сумма всѣхъ сторонъ сферическаго треугольника менѣе окружности большаго круга (§ 216).
3. Сумма угловъ сферическаго треугольника болѣе двухъ и менѣе шести прямыхъ угловъ (§ 217).
4. Въ равнобедренномъ сферическомъ треугольникѣ углы, лежащіе противъ равныхъ сторонъ, равны (§ 224).
5. Два сферическихъ треугольника, имѣющихъ по равному углу, заключенному между двумя соотвѣтственно равными сторонами, равны или симметричны (§ 221).
6. Два сферическихъ треугольника, имѣющихъ по равной сторонѣ, заключенной между двумя соотвѣтственно равными углами, равны или симметричны (§ 222).
7. Два сферическихъ треугольника, имѣющихъ стороны соотвѣтственно равныя, равны или симметричны (§ 220).
8. Два сферическихъ треугольника, имѣющихъ углы соотвѣтственно равные, равны или симметричны (§ 223).

§ 302. Задача. *Опредѣлить площадь сферическаго треугольника по тремъ даннымъ угламъ его.*

Рѣшеніе Пусть будетъ вопервыхъ *ABC* (черт. 339) равнобедренный сферическій треугольникъ, въ которомъ *AB*=*BC*. Продоливъ стороны треугольника *ABC*, получимъ три окружности большихъ круговъ *ACML*, *ABMN* и *BCNL* Сферическій треугольникъ *ANC* также равнобедренный, потому что стороны его *AN* и *NC* служатъ дополненіями до полуокружности сторонамъ *AB* и *BC*. Но стороны треугольника *ANC* соотвѣтственно равны сторонамъ треугольника *BLM* Въ самомъ дѣлѣ, *NCB* и *CBL* суть полуокружности, слѣд. вычтя, изъ нихъ по дугѣ *BC*, найдемъ *NC* = *LB*. Подобнымъ образомъ найдемъ, что стороны *AC* и *LM* равны между собою Вслѣдствіе равенства сторонъ равнобедренные треугольники *ANC* и *LBM* равны и совмѣстимы (§ 301 слѣдств. 7).



Черт. 339.

Если въ двусторонникѣ *BANCB* замѣнимъ треугольникъ *NAC* треугольникомъ *BLM* и прибавимъ къ нему двусторонники *LBCAL* и *MBACM*, то получимъ поверхность полушара *ACMLB*, сложенную съ двумя треугольниками *ABC*. Означивъ поверхность сферическаго треугольника чрезъ *S*, дуги измѣряющія углы *A*, *B*, *C* чрезъ *a*, *b*, *c* и радіусъ шара чрезъ *r*, найдемъ, что поверхность трехъ двусторонниковъ *MBACM*, *LBCAL* и

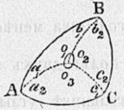
BANCB равна $(a + b + c)\ 2r$ (§ 299) и потому

$$2\pi r^2 + 2S = (a + b + c)\ 2r;$$

отсюда

$$S = (a + b + c \quad \pi r)\ r.$$

Эта же формула выражаетъ площадь какого нибудь сферическаго треугольника. Въ самомъ дѣлѣ пусть будетъ ABC (черт. 340) какой нибудь сферическій треугольникъ; вообразимъ перпендикуляръ, опущенный изъ центра шара на плоскость, проходящую чрезъ точки A,B и C, пусть O будетъ точкою встрѣчи этого перпендикуляра съ поверхностью сферическаго треугольника ABC Такъ какъ этотъ перпендикуляръ находится на одинакомъ разстояніи отъ точекъ A,B и C (§ 288), то точка O равно отстоитъ отъ этихъ точекъ, и если проведемъ дуги большихъ круговъ AO,BO и OC, то эти дуги, соотвѣтствующія равнымъ хордамъ, будутъ равны; слѣдов. сферическій треугольникъ ABC раздѣляется дугами AO, BO и CO на три равнобедренныхъ сферическихъ треугольника AOB, BOC и COA. Означивъ дуги угловъ треугольника AOB чрезъ a_1, b_1 и o_1, треуголника BOC—чрезъ b_2, c_2, o_2, а треугольника AOC—чрезъ a_2, o_3, c_1, тогда найдемъ, по предъидущему,



Черт. 340.

$$AOB = (a_1 + b_1 + o_1 - \pi r)\ r;\quad BOC = (b_2 + c_2 + o_2 - \pi r)\ r;$$

$$AOC = (a_2 + o_3 + c_1) - \pi r)\ r.$$

Если сложимъ эти уравненія, означимъ площадь сферическаго треугольника ABC чрезъ S, дуги соотвѣтствующія его угламъ чрезъ a, b и c и замѣтимъ, что $o_1 + o_2 + o_3$ равняется окружности большаго круга, т е. $2\pi r$, то получимъ

$$S = (a + b + c - \pi r)\ r.$$

Раздѣливъ обѣ части этого уравненія на πr^2, найдемъ

$$\frac{S}{\pi r^2} = \frac{a + b + c}{\pi r} - 1.$$

Примемъ прямой двусторонникъ за единицу поверхности и прямой уголъ за единицу угловъ. Такъ какъ всякій двугранный уголъ относится къ своей дугѣ, какъ два прямыхъ двугранныхъ угла къ половинѣ окружности большаго круга, то $\frac{A}{a} = \frac{2}{\pi r}$; $\frac{B}{b} = \frac{2}{\pi r}$ и $\frac{C}{c} = \frac{2}{\pi r}$; отсюда $a = \frac{\pi r.A}{2}$; $b = \frac{\pi r.B}{2}$ и $c = \frac{\pi r.C}{2}$, и потому $\frac{S}{\pi r^2} = \frac{A + B + C}{2} - 1$. Поверхность прямаго двусторонника равна πr^2 (§ 299), а такъ какъ эту поверхность принимаемъ за единицу, то

$$S = \frac{A + B + C}{2} - 1,$$

т. е *поверхность сферическаго треугольника равняется полусуммѣ его угловъ безъ прямаго угла,* когда поверхность прямаго двусторонника принимаемъ за единицу поверхностей, а прямой уголъ — за единицу угловъ.

Подобіе круглыхъ тѣлъ.

§ 303. Два цилиндра, высоты которыхъ пропорціональны радіусамъ ихъ основаній, называютъ *подобными.*

Очевидно, что отъ обращенія подобныхъ прямоугольниковъ около сходственныхъ сторонъ образуются подобные цилиндры.

Теорема. *Основанія двухъ подобныхъ цилиндровъ относятся какъ квадраты ихъ высотъ.*

Доказ. Пусть будутъ H и h высоты, R и r радіусы основаній двухъ подобныхъ цилиндровъ. Такъ какъ $\frac{R}{r} = \frac{H}{h}$, то $\frac{R^2}{r^2} = \frac{H^2}{h^2}$ и потому $\frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{H^2}{h^2}$.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что *объемы двухъ подобныхъ цилиндровъ относятся какъ кубы ихъ высотъ,* потому что, означивъ объемы двухъ подобныхъ цилиндровъ чрезъ V и v и замѣтивъ, что $V = \pi R^2H$ и $v = \pi r^2h$, найдемъ $\frac{V}{v} = \frac{\pi R^2H}{\pi r^2h} = \frac{H^3}{h^3}$.

§ 304. Два конуса, которыхъ высоты пропоріональны радіусамъ основаній называются *подобными.*

Очевидно, что отъ обращенія подобныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ около сходственныхъ катетовъ образуются подобные конусы.

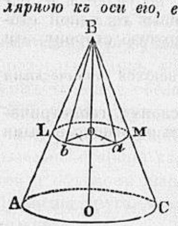
Теорема. *Основанія подобныхъ конусовъ относятся какъ квадраты ихъ высотъ.*

Доказ. Пусть будутъ H и h высоты, R и r радіусы основаній двухъ подобныхъ конусовъ. Такъ какъ $\frac{R}{r} = \frac{H}{h}$, то $\frac{R^2}{r^2} = \frac{H^2}{h^2}$ и потому $\frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{H^2}{h^2}$.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что *объемы двухъ подобныхъ конусовъ относятся какъ кубы ихъ высотъ,* потому что, означивъ объемы двухъ подобныхъ конусовъ чрезъ V и v, и замѣтивъ что $V = \frac{\pi R^2H}{3}$ и $v = \frac{\pi r^2h}{3}$, найдемъ $\frac{V}{v} = \frac{\pi R^2H}{\pi r^2h} = \frac{H^3}{h^3}$.

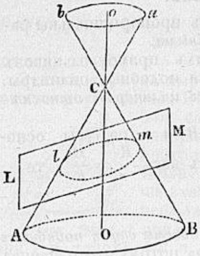
Коническія сѣченія.

§ 305. Теорема. *Сѣченіе конуса плоскостью, перпендикулярною къ оси его, есть кругъ.*



Черт. 341.

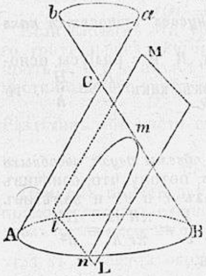
Доказ. Пусть будетъ LM (черт. 341) сѣченіе перпендикулярное къ оси конуса BO и o точка, въ которой ось встрѣчаетъ это сѣченіе. Если соединимъ какія нибудь двѣ точки a и b линіи сѣченія съ вершиною B и съ точкою o, то получимъ два прямоугольныхъ треугольника Boa и Bob, которые равны между собою, потому что имѣютъ общій катетъ Bo и по равному острому углу; слѣдов. $oa = ob$; а это значитъ, что линія сѣченія есть кругъ, котораго центръ находится въ o.



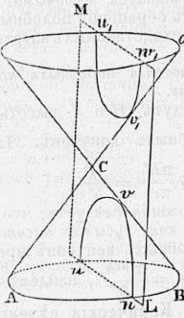
Черт. 342.

Если разсмотримъ коническую поверхность *ACB* (черт. 342), какъ поверхность образованную движеніемъ линіи *CB*, которой одинъ конецъ *B* скользитъ по окружности круга *AB*, между тѣмъ какъ другой конецъ *C* остается неподвижнымъ на перпендикулярѣ, возставленномъ къ кругу *AB* изъ центра его; то въ этомъ случаѣ продолженіе образующей *Cb* опишетъ другую коническую поверхность *aCb*, обращенную въ противуположную сторону. Эти двѣ поверхности, происшедшія отъ движенія одной и тойже линіи, называются ***полостями*** конуса.

Когда пересѣчемъ конусъ *ACB* плоскостью *LM*, встрѣчающею всѣ образующія, то въ сѣченіи получится сомкнутая кривая линія *lm*, которая называется ***эллипсисомъ***.



Черт. 343.



Черт. 344.

Когда плоскость сѣченія *LM* (черт. 343) параллельна одной изъ образующихъ, напр *CA*, то въ сѣченіи получится кривая линія *lmn*, ограниченная съ одной стороны и безпредѣльно простирающая въ другую сторону; эта кривая называется ***параболою***.

Наконецъ когда плоскость сѣченія *LM* (черт. 344) параллельна оси конуса, она пересѣчетъ обѣ полости конуса Въ этомъ случаѣ получаются въ сѣченіи двѣ кривыя uvw и $u_1v_1\omega_1$, ограниченныя съ одной стороны и безпредѣльно простирающіяся въ другую сторону; эти двѣ кривыя вмѣстѣ называются ***гиперболою***.

Эллипсисъ, парабола и гипербола называются ***коническими сѣченіями***.

Эти линіи столь же замѣчательны по своимъ геометрическимъ свойствамъ, какъ и по связи ихъ съ многочисленными явленіями природы.

Задачи.

241. Плоскость пересѣкаетъ шаръ, радіуса въ 10 ф, по кругу, котораго радіусъ равенъ 8 ф; опредѣлить разстояніе этой плоскости отъ центра шара.

242. Найти посредствомъ построенія радіусъ даннаго шара.

243. Опредѣлитъ объемъ усѣченнаго конуса, котораго высота равна 1,35, а радіусы двухъ основаній равны 0,90 и 0,65.

244. По данной поверхности шара *S* опредѣлить его объемъ.

245. Опредѣлить поверхность и объемъ земнаго шара, принимая радіусъ его равнымъ 636,62 миріаметрамъ.

246. Опредѣлить радіусъ шара, котораго поверхность = 1 кв. ф.

247. Полушаръ содержитъ 5 куб. фут; опредѣлить радіусъ его.

248. Опредѣлить поверхность жаркаго пояса земли, принимая высоту его равною 507 миріаметр. и радіусъ земли равнымъ 636,62 миріам.

249. Опредѣлить поверхность холодной полосы земли, принимая высоту ея равной 52,65 миріам , а радіусъ земли въ 632,62 миріаметр.

250. Опредѣлить высоту цилиндра, радіусъ основанія котораго равенъ 8 ф. и который содержитъ 486 куб. фут

251. Опредѣлить объемъ конуса, котораго высота равна 12 ф., а образующая — 15 ф.

252. Объемъ конуса равенъ 1 куб. фут., а радіусъ основанія его есть треть его высоты; опредѣлить этотъ радіусъ.

253. Литръ, служащій французскою мѣрою для жидкостей, есть цилиндръ, котораго высота вдвое болѣе діаметра его основанія и котораго вмѣстимость равна 1 куб. дециметру. Опредѣлить высоту и радіусъ основанія литра.

2.4 Опредѣлить отношеніе поверхностей и объемовъ двухъ цилиндровъ, происшедшихъ отъ обращенія прямоугольника около его основанія и высоты.

255. Цилиндръ мыльной воды, котораго высота равна 2 миллиметрамъ, а радіусъ основанія также равенъ 2 миллим., можетъ образовать пузырь, котораго радіусъ равенъ 54 миллиметр. Опредѣлить толщину оболочки пузыря.

256 Около круга, котораго радіусъ равенъ *r*, описанъ квадратъ и равносторонній треугольникъ, котораго основаніе параллельно сторонѣ квадрата. Опредѣлить отношеніе поверхностей и объемовъ шара, цилиндра и конуса, происшедшихъ отъ обращенія круга, квадрата и треугольника около высоты треугольника.

РѢШЕНІЕ ЗАДАЧЪ.

ЧАСТЬ I. ПЛАНИМЕТРІЯ.

ГЛАВА II.

1. На произвольно начерченной прямой откладываются, посредствомъ циркуля, одна за другой, всѣ данныя линіи.

2. Тоже построеніе.

3. На линіи AB откладывается мѐньшая линія MN.

4. Изъ обоихъ концовъ прямой AB описываются окружности равными радіусами; линія, соединяющая точки пересѣченія двухъ окружностей, раздѣлитъ линію AB пополамъ.

5. Линія AB дѣлится пополамъ, каждая часть опять пополамъ и т. д.

6. Если сложимъ линіи s и d и раздѣлимъ линію $s + d$ пополамъ, то получимъ бóльшую изъ двухъ искомыхъ линій; если же изъ s вычтемъ d и раздѣлимъ линію $s—d$ пополамъ, то получимъ мѐньшую изъ двухъ искомыхъ линій.

7. Тоже построеніе какъ въ зад. 4.

8. По обѣимъ сторонамъ точки O откладываются равныя части OM и ON и изъ точекъ M и N описываются дуги равными радіусами; линія, соединяющая точку пересѣченія этихъ дугъ съ точкою O, будетъ искомый перпендикуляръ.

9. Изъ точки M описывается окружность, пересѣкающая прямую AB въ точкахъ P и Q; изъ точекъ P и Q описываются дуги равными радіусами; линія, соединяющая точку пересѣченія этихъ двухъ дугъ съ точкою M, будетъ искомый перпендикуляръ.

10. Изъ точки M опускается перпендикуляръ на линію AB.

11. Перпендикуляръ, возставленный въ срединѣ прямой AB.

12. Изъ точки O описывается произвольнымъ радіусомъ дуга, которая пересѣчетъ стороны угла въ точкахъ L и M; изъ точки A описывается тѣмъ же радіусомъ дуга, которая пересѣчетъ прямую AB въ точкѣ C; наконецъ изъ точки C радіусомъ LM описывается дуга, которая пересѣчетъ первую дугу въ точкѣ D. Соединивъ точки D и A, получимъ уголъ DAC, равный углу LOM.

13. Проведя произвольную линію AB, составимъ при какой нибудь ея точкѣ A уголъ CAB, равный первому изъ данныхъ угловъ; при той же точкѣ A составимъ на линіи AC уголъ, равный второму изъ данныхъ угловъ и. т. д.

14. Тоже построеніе.

15. Проведя произвольную прямую AB, составимъ при какой нибудь точкѣ ея A углы CAB и DAB, равные даннымъ угламъ; тогда уголъ CAD будетъ искомый уголъ.

16. Изъ вершины A описываемъ произвольнымъ радіусомъ дугу, которая пересѣчетъ стороны угла въ B и C; изъ точекъ B и C описываемъ одинакими радіусами дуги, которыя пересѣкутся въ точкѣ D; линія AD раздѣлитъ уголъ пополамъ.

17. Раздѣливъ уголъ BAC пополамъ, дѣлимъ каждую часть снова пополамъ и. т. д.

18. Пусть будутъ s и d сумма и разность двухъ искомыхъ угловъ. Сложивъ s и d и раздѣливъ уголъ $s + d$ пополамъ, получимъ большій изъ искомыхъ угловъ; вычтя d изъ s и раздѣливъ уголъ $s—d$ пополамъ, найдемъ меньшій изъ двухъ искомыхъ угловъ.

19. Раздѣливъ линію BC пополамъ, соединимъ средину ея съ точкою A.

20. Опустивъ изъ L перпендикуляръ на AB, продолжимъ его на равное разстояніе по другую сторону AB; линія, соединяющая конецъ его съ точкою M, пересѣчетъ AB въ искомой точкѣ.

21. Изъ точки A опускаемъ перпендикуляръ на линію, дѣлящую уголъ LOM пополамъ.

22. Перпендикуляръ, возставленный въ срединѣ NM, пересѣчетъ AB въ искомой точкѣ.

23. Линія, дѣлящая уголъ AOC пополамъ.

24. Линія, дѣлящая уголъ двухъ прямыхъ LM и PQ пополамъ, пересѣчетъ прямую AB въ искомой точкѣ.

25. На произвольно взятой линіи откладывается одна изъ данныхъ сторонъ, а изъ концевъ ея, радіусами равными двумъ другимъ сторонамъ, описываются дуги, пересѣченіе которыхъ опредѣлитъ третью вершину треугольника. Вопросъ возможенъ только тогда, когда наибольшая изъ данныхъ сторонъ меньше суммы двухъ другихъ сторонъ.

26. Построивъ уголъ, равный данному, откладываемъ на сторонахъ его данныя стороны.

27. На произвольной прямой откладываемъ данную сторону и при концахъ ея строимъ два угла, равные даннымъ угламъ; пересѣченіе двухъ сторонъ этихъ угловъ опредѣлитъ третью вершину треугольника.

28. Построивъ уголъ BAC, равный данному углу, откладываемъ на одной изъ сторонъ его часть AC, равную данной сторонѣ не противулежащей данному углу, и изъ точки C описываемъ радіусомъ, равнымъ другой сторонѣ, дугу, пересѣченіе которой съ стороною AB опредѣлитъ третью вершину треугольника. Вопросъ возможенъ только тогда, когда дуга и прямая пере-

сѣкутся, т. е. когда сторона, противулежащая данному углу, больше перпендикуляра, опущеннаго изъ C на AB. Если при этомъ сторона, противулежащая данному углу, менѣе другой стороны, то вопросъ допускаетъ два рѣшенія; когда же эта сторона равна перпендикуляру опущенному изъ C на AB, то искомый треугольникъ будетъ прямоугольный и вопросъ допускаетъ только одно рѣшеніе. Если сторона, лежащая противъ даннаго угла, больше другой стороны, то вопросъ также допускаетъ только одно рѣшеніе.

29. На одной изъ сторонъ прямаго угла откладывается данный катетъ и изъ конца его описывается радіусомъ, равнымъ гипотенузѣ, дуга, пересѣченіе которой съ другой стороною прямаго угла опредѣлитъ третью вершину треугольника.

30. Построивъ уголъ, равный данному углу, откладываемъ на одной изъ его сторонъ часть равную гипотенузѣ и изъ конца ея опускаемъ перпендикуляръ на другую сторону угла.

31. Построивъ уголъ BAC, равный данному углу, откладываемъ на сторонѣ AB часть AM, равную данной сторонѣ, и на AC часть AN, равную данной разности двухъ другихъ сторонъ. Въ срединѣ линіи MN возставляемъ перпендикуляръ, который пересѣчетъ линію AC въ точкѣ D; AMD будетъ искомый треугольникъ. Вопросъ возможенъ только тогда, когда точка D лежитъ на продолженіи линіи AN.

32. Построивъ уголъ BAC, равный данному углу, откладываемъ на AB часть AM, равную данной сторонѣ и на AC часть AN, равную данной суммѣ двухъ другихъ сторонъ. Въ срединѣ линіи MN возставляемъ перпендикуляръ, который пересѣчетъ AC въ точкѣ D; AMD будетъ искомый треугольникъ. Вопросъ возможенъ только тогда, когда точка D лежитъ между точками A и N.

33. Опустимъ изъ L перпендикуляръ на AB и продолжимъ его на равное разстояніе; линія, соединяющая по другую сторону AB, конецъ его съточкою M, пересѣчетъ AB въ искомой точкѣ.

ГЛАВА III.

34. 1) Изъ точки A опускаемъ перпендикуляръ AP на линію LM и въ той же точкѣ A возставляемъ перпендикуляръ къ AP.

2) Чрезъ A проводимъ произвольную линію, пересѣкающую LM въ точкѣ P и строимъ при точкѣ A на линіи AP уголъ, равный углу APM.

35. При какой нибудь точкѣ P прямой LM строимъ уголъ MPQ, равный данному углу, и проводимъ чрезъ точку A линію, параллельную QP.

36. Линія, параллельная прямой LM и находящаяся отъ нея на разстояніи a.

37. Двадцати шести прямымъ угламъ. 38. Семнадцать.

39. Раздѣливъ многоугольникъ діагоналями на треугольники, строимъ послѣдовательно рядъ треугольниковъ имъ равныхъ.

40. Прямой уголъ.

41. Изъ какой нибудь точки L прямой LM описываемъ радіусомъ a дугу, которая пересѣчетъ прямую PQ въ точкѣ R; прямая, проведенная изъ точки A параллельно линіи LR будетъ искомая линія. Вопросъ допускаетъ два рѣшенія.

42. Проведя чрезъ A произвольную прямую AC и отложивъ на ней n равныхъ но произвольныхъ частей, соединимъ конецъ послѣдней части C съ точкою B и проведемъ чрезъ всѣ точки дѣленія линіи AC прямыя, параллельныя прямой CB.

43. Чрезъ O проводимъ линію параллельную AC, которая пересѣчетъ сторону AB въ точкѣ D; откладываемъ на сторонѣ AB часть $DB = AD$ и проводимъ прямую чрезъ точки B и O.

44. При какой нибудь точкѣ A, произвольно взятой прямой AB, строимъ уголъ BAC, равный одному изъ данныхъ угловъ и проводимъ линію, параллельную прямой AB, на разстояніи h отъ нея, — положимъ, что она пересѣчетъ линію AC въ точкѣ C; проводимъ чрезъ C прямую, которая составитъ съ линіею AB уголъ равный второму изъ данныхъ угловъ и пересѣчетъ линію AB положимъ въ B; ABC будетъ искомый треугольникъ.

45. Въ срединѣ D линіи AB, равной данному основанію, возставляемъ перпендикуляръ и въ какой нибудь точкѣ E его строимъ уголъ DEF равный половинѣ даннаго угла; проводимъ за тѣмъ изъ A линію параллельную EF, которая пересѣчетъ DE въ точкѣ C, тогда ABC будетъ искомый треугольникъ.

46 Построивъ уголъ BAC равный данному углу, проведемъ линію параллельную сторонѣ AC на разстояніи h отъ нея, которая пересѣчетъ AB, положимъ въ точкѣ B, тогда AB есть одна изъ сторонъ искомаго треугольника. Вычтя AB изъ периметра p, получаемъ сумму двухъ другихъ сторонъ, и вопросъ нроводится къ зад. 32.

47. На линіи AB, равной данному периметру p, строимъ треугольникъ ABC, имѣющій данные углы m и n, прилежащіе сторонѣ AB. Пусть будетъ P точка пересѣченія линій, дѣлящихъ углы A и B пополамъ; проводимъ изъ P линіи параллельныя сторонамъ BC и AC, пересѣкающія AB, положимъ, въ точкахъ R и Q; тогда PQR будетъ искомый треугольникъ.

48. Вопросъ приводится къ построенію треугольника, котораго стороны будутъ: данная сторона параллелограмма и половины двухъ его діагоналей.

ГЛАВА IV.

49. Прямой уголъ. 50. Восемь футовъ. 51. Два фута 52. Уголъ тупой.

53. Если отъ периметра отнимемъ данный катетъ b, то получимъ сумму гипотенузы и другаго катета; слѣдов. построе-

ніе треугольника приводится къ задачѣ 32. Гипотенуза будетъ равняться $\frac{(p-b)^2+b^2}{2p-b}$.

54. $l=\sqrt{\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{2}}$

55. Начертивъ какой нибудь уголъ BAC, откладываемъ на сторонѣ AB части $AM=a$ и $MN=b$, на сторонѣ же AC—часть $AP=c$; соединивъ за тѣмъ P и M, проводимъ чрезъ N линію параллельную MP, которая пересѣчетъ AC, положимъ, въ точкѣ Q; PQ будетъ искомая линія.

56 Проведя чрезъ A произвольную линію AC, откладываемъ на ней линіи AM и MN, отношеніе которыхъ равнялось бы данному отношенію, соединяемъ N и B и проводимъ чрезъ M линію параллельную NB.

57. Проведя чрезъ A произвольную линію AC, откладываемъ на ней $AM=m$; $MN=n$; $NP=p$; $PQ=q$, соединяемъ Q и B и проводимъ чрезъ точки P, N и M линіи параллельныя къ QB.

58. На линіи BC опредѣляемъ точку I такъ, чтобы $\frac{BI}{CI}=\frac{m}{n}$, тогда AI будетъ искомая линія Вопросъ допускаетъ два рѣшенія, соотвѣтствующія положенію точки I на продолженіи линіи BC или между точками B и C.

59. Изъ какой нибудь точки D линіи AC опускаемъ перпендикуляръ DE на линію AB и изъ D, радіусомъ DE, описываемъ дугу, пересѣкающую AI въ точкѣ F. Если чрезъ I проведемъ линію параллельную DF, то она пересѣчетъ линію AC въ искомой точкѣ.

60. Проведячрезъ I линію параллельную AB, положимъ, что она пересѣчетъ линію AC или продолженіе ея въ D; отложимъ на AC такую часть DE, чтобы $\frac{AD}{DE}=\frac{m}{n}$; тогда EI будетъ искомая линія.

61. Параллельная къ AB.

62. Разстояніе двухъ сторонъ въ 9 футовъ, равное 2 фут., относится къ искомому разстоянію, какъ 3 къ 9; слѣдов. искомое разстояніе равно 6 фут.

63. Построивъ параллелограммъ $ABCD$, въ которомъ $AB=2l$, $BC=2l_1$ и діагональ $AC=2l_2$, дѣлимъ другую діагональ BD на три равныя части въ точкахъ I и H; AIH будетъ искомый треугольникъ. Вопросъ возможенъ только тогда; когда большая изъ линій l, l_1 и l_2 меньше суммы двухъ другихъ линій.

64. Другая сторона равна $\sqrt{\frac{d^2+d_1^2-2a^2}{2}}$.

65. Строимъ послѣдовательно углы, равные угламъ даннаго многоугольника и стороны, пропорціональныя сторонамъ его, принимая AB за первую сторону искомаго многоугольника.

66. Пусть будетъ A наибольшій уголъ даннаго треугольника ABC. Изъ точки A опускаемъ перпендикуляръ AP на сторону BC, проводимъ линію AH параллельную BC и дѣлаемъ $AH=AP$; положимъ, что BH пересѣчетъ AC въ точкѣ N; изъ N опускаемъ перпендикуляръ NT на BC; NT будетъ сторона искомаго квадрата.

67. Пусть будетъ A наибольшій уголъ даннаго треугольника ABC. Изъ точки A опускаемъ перпендикуляръ AP на сторону BC, проводимъ AH параллельно BC и дѣлаемъ $\frac{AH}{AP}=\frac{m}{n}$. Положимъ, что линія BH пересѣчетъ AC въ точкѣ N Изъ N опускаемъ перпендикуляръ NF на BC; NF будетъ одна изъ сторонъ искомаго треугольника.

68 Пусть будетъ M одна изъ искомыхъ точекъ и O средина линіи AB, имѣемъ $AM^2+BM^2=2(MO^2+AO^2)=m^2$ (§ 71). Слѣдов. MO есть величина постоянная т. е. искомое геометрическое мѣсто есть окружность, которой центръ находится въ O.

ГЛАВА V.

69. Часть линіи, проходящей чрезъ данную точку и центръ круга.

70. Часть линіи, проходящей чрезъ данную точку и центръ круга.

71. Часть линіи, проходящей чрезъ оба центра.

72. Наложить хорду данной дуги два, три раза и т. д.

73 Соединивъ точку A съ центромъ O, проведемъ чрезъ A перпендикуляръ къ AO.

74. Въ срединѣ хорды возставляемъ перпендикуляръ и повторяемъ это построеніе два, три раза и т. д.

75. Линія перпендикулярная къ срединѣ прямой AB.

76. Возставивъ въ срединѣ линіи AB перпендикуляръ, опишемъ изъ точки A даннымъ радіусомъ дугу; пересѣченіе этой дуги и перпендикуляра есть центръ искомаго круга. Вопросъ возможенъ только тогда, когда данный радіусъ не меньше $\frac{AB}{2}$.

77. Взявъ на дугѣ или окружности три какія нибудь точки A, B и C, возставляемъ перпендикуляры въ срединѣ хордъ AB и BC; точка пересѣченія этихъ перпендикуляровъ будетъ искомый центръ.

78. Перпендикуляръ къ прямой AB въ точкѣ M.

79. Возставивъ въ точкѣ M перпендикуляръ къ прямой AB, откладываемъ на этомъ перпендикулярѣ часть MO, равную данному радіусу.

80. Возставимъ въ точкѣ M перпендикуляръ къ прямой AB, и другой перпендикуляръ въ срединѣ линіи MN; точка пересѣченія двухъ перпендикуляровъ будетъ центръ искомаго круга.

81. Параллель къ линіи AB на разстояніи r отъ нея, пересѣчетъ линію MN въ точкѣ, которая будетъ центромъ искомаго круга.

Вопросъ невозможеный или неопредѣленый, когда линіи AB и MN параллельны.

82. Параллель къ линіи AB на разстояніи r отъ нея пересѣчетъ окружность въ точкѣ, которая будетъ центромъ искомаго круга.

Вопросъ допускаетъ два рѣшенія, одно рѣшеніе или вопросъ невозможенъ, смотря потому будетъ ли разстояніе центра даннаго круга отъ прямой AB меньше, равно, или больше суммы радіусовъ двухъ круговъ.

83. Окружность описанная изъ центра даннаго круга радіусомъ равнымъ суммѣ или разности двухъ радіусовъ R и r.

84 Изъ центра даннаго круга описываемъ окружность радіусомъ равнымъ суммѣ или разности двухъ радіусовъ R и r; пересѣченіе этой окружности съ прямой AB есть центръ искомаго круга.

85. На линіи, соединяющей центръ даннаго круга съ точкою M, откладываемъ часть $MO_1 = r$; O_1 будетъ центръ искомаго круга.

Вопросъ допускаетъ два рѣшенія.

86 Линія, соединяющая центръ круга съ точкою N и перпендикуляръ къ срединѣ MN, пересѣкутся въ центрѣ искомаго круга.

87. Перпендикуляръ, опущенный изъ центра на линію MN и перпендикуляръ къ срединѣ линіи AB, опредѣлятъ своимъ пересѣченіемъ центръ искомаго круга.

88. Возставивъ перпендикуляръ MN къ прямой AB въ точкѣ M и отложивъ на немъ часть MN, равную радіусу даннаго круга, соединимъ точку N съ центромъ O даннаго круга и возставимъ перпендикуляръ въ срединѣ линіи NO; пересѣченіе этого перпендикуляра съ перпендикуляромъ MN опредѣлитъ центръ искомаго круга. Вопросъ допускаетъ два рѣшенія.

89. Проводимъ въ M касательную, которая пересѣчетъ линію AB, положимъ, въ C; линія, дѣлящая уголъ ACM пополамъ и линія, соединяющая M съ центромъ даннаго круга, опредѣляютъ своимъ пересѣченіемъ центръ искомаго круга.

Вопросъ допускаетъ два рѣшенія, соотвѣтствующія внѣшнему и внутреннему касанію.

90. Половина гипотенузы.

91. Окружность описанная около гипотенузы какъ діаметра.

92. Окружность, которой радіусъ равенъ половинѣ разстоянія точки A отъ центра даннаго круга.

93 Когда въ четыреугольникѣ $ABCD$ сумма противуположныхъ угловъ равна $2d$.

94 Изъ какой нибудь точки O лежащей внѣ прямой AB, описываемъ радіусомъ OA окружность, которая пересѣчетъ AB, положимъ, въ M и проводимъ чрезъ точки O и M діаметръ, который пересѣчетъ окружность, положимъ, въ N; линія AN будетъ искомый перпендикуляръ.

95. 1) Если точка A лежитъ на окружности, то перпендикуляръ, возставленный въ точкѣ A къ радіусу, проведенному въ эту точку, будетъ искомая касательная.

2) Если точка A лежитъ внѣ круга, то соединивъ A съ центромъ круга O, опишемъ около AO, какъ діаметра, окружность, которая пересѣчетъ данную окружность, положимъ, въ точкахъ M и N; линіи AM и AN будутъ искомыя касательныя.

96. Построивъ уголъ BAM, равный данному углу, опустимъ изъ центра перпендикуляръ на AM и въ точкѣ пересѣченія этого перпендикуляра съ окружностью проводимъ касательную.

97. Концентрическая окружность радіуса $\sqrt{a^2 + r^2}$.

98. Пересѣченіе предъидущаго геометрическаго мѣста съ линіею AB.

Вопросъ допускаетъ два рѣшенія, одно рѣшеніе, или онъ невозможенъ смотря потому будетъ ли разстояніе центра даннаго кругъ отъ прямой AB менѣе, равно или болѣе $\sqrt{a^2+r^2}$.

99. Въ данномъ кругѣ откладываемъ хорду равную a и описываемъ концентрическую окружность, касательную къ этой хордѣ; за тѣмъ проводимъ изъ точки A касательную къ этой окружности. Вопросъ возможенъ, когда a меньше діаметра даннаго круга.

100. Построивъ въ данномъ кругѣ вписанный уголъ MON, равный данному углу, опредѣлимъ хорду MN, тогда вопросъ приводится къ задачѣ. 99.

101. Чрезъ точку A проведемъ прямую MAN, такъ, чтобы уголъ MAB равнялся данному углу a; возставляемъ перпендикуляръ въ срединѣ линіи AB и другой перпендикуляръ въ B къ линіи MN, наконецъ изъ точки пересѣченія O этихъ двухъ перпендикуляровъ описываемъ радіусомъ AO окружность; часть ея лежащая въ углѣ NAB есть искомая дуга.

102. Дуга, описанныя на линіи AB, вмѣщающая уголъ a.

103. Дуга, описанная на линіи AB, вмѣщающая уголъ a.

104. На линіи MN описываемъ дугу, вмѣщающую уголъ a; пересѣченіе ея съ прямой AB опредѣлитъ искомую точку. Вопросъ всегда возможенъ и допускаетъ только одно рѣшеніе, когда точки M и N лежатъ по разнымъ сторонамъ прямой. Когда же точки M и N лежатъ по одной сторонѣ прямой AB, то вопросъ допускаетъ два рѣшенія, одно рѣшеніе, или онъ не возможенъ, смотря потому пересѣкаетъ ли дуга прямую AB, касается ея, или не встрѣчается съ нею.

105. Описать на линіяхъ AB и MN дуги, вмѣщающія уголъ въ 45°.

106. На двухъ сторонахъ AB и BC описать дуги, вмѣщающія углы въ 120°; пересѣченіе этихъ двухъ дугъ опредѣлитъ искомую точку.

107. На линіи $AB = a$ опишемъ дугу, вмѣщающую уголъ m; пусть будетъ r радіусъ этой дуги; проведемъ параллель къ AB

на разстояніи h отъ нея; пересѣченіе этой линіи съ дугою опредѣлитъ вершину искомаго треугольника. Вопросъ возможенъ тогда, когда $h < r \pm \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$, гдѣ знакъ + относится къ тому случаю, когда m означаетъ острый уголъ, а знакъ — когда m тупой уголъ.

108. На линіи AB описываемъ дугу AKB вмѣщающую половину угла, вписаннаго въ сегментѣ AMB даннаго круга; за тѣмъ изъ A радіусомъ s описываемъ дугу, которая пересѣчетъ дугу AKB въ точкѣ N, линія AN пересѣчетъ дугу AMB въ искомой точкѣ. Вопросъ возможенъ когда $s < 2\sqrt{2r^2 \mp 2r\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}}$, и $s > a$, гдѣ r есть радіусъ даннаго круга и a длина линіи AB. Два рѣшенія.

109. На линіи AB описываемъ дугу KAB, вмѣщающую уголъ равный $90^0 + \frac{m}{2}$, гдѣ m означаетъ уголъ, вписанный въ сегментѣ AMB даннаго круга. За тѣмъ изъ A радіусомъ d описываемъ дугу, которая пересѣчетъ дугу AKB въ точкѣ N; линія AN пересѣчетъ дугу AMB въ искомой точкѣ. Два рѣшенія, какъ въ предъидущей задачѣ. Вопросъ возможенъ, когда $d < a$, гдѣ a означаетъ длину линіи AB.

110. На данномъ основаніи описываемъ дугу, вмѣщающую данный уголъ; тогда вопросъ приводится къ задачѣ 108.

111. 1) Пусть будутъ AB и CD двѣ данныя линіи. На произвольной прямой откладываемъ $MN = AB$ и $NL = CD$, такъ, чтобы $ML = AB + CD$, и, описавъ около ML, какъ діаметра, окружность, возставляемъ въ N перпендикуляръ къ ML.

2) На большей изъ двухъ данныхъ линій AB откладываемъ часть BN, равную меньшей линіи CD, и описавъ около AB, какъ діаметра, окружность, возставляемъ въ N перпендикуляръ къ AB, который пересѣчетъ окружность, положимъ, въ точкѣ M; тогда MB будетъ искомая линія.

3) Отложивъ на AB часть $BN = CD$, опишемъ около AN, какъ діаметра, окружность, и проведемъ изъ точки B касательную къ ней; если M есть точка касанія, то BM будетъ искомою линіею.

112. На линіи AB описываемъ дугу ADB, вмѣщающую данный уголъ m; пусть будетъ AEB другая часть окружности. Проведемъ линію LM параллельно линіи AB на разстояніи r отъ нея и, раздѣливъ дугу AEB въ точкѣ E пополамъ, опишемъ радіусомъ AE изъ точки E дугу, которая пересѣчетъ линію LM, положимъ, въ точкѣ O. Точка O будетъ центръ вписаннаго круга, котораго радіусъ есть r. Проведя прямую чрезъ точки O и E, положимъ что она пересѣчетъ окружность $ACBE$ въ точкѣ C, тогда ACB будетъ искомый треугольникъ. Вопросъ

возможенъ, когда $R > \frac{(a^2 + 4r^2)}{4r\,(a^2 - 4r^2)}$ и $a > 2r$, гдѣ a означаетъ длину линіи AB и R радіусъ круга $ACBE$.

113. 1) Пусть будетъ O центръ и R радіусъ большаго круга, O_1 центръ и r радіусъ меньшаго. Изъ O, радіусомъ $R - r$, описываемъ окружность и проводимъ изъ O_1 касательную къ ней; пусть будетъ A точка касанія. Проведя радіусъ OA и продоживъ его до пересѣченія въ точкѣ M съ окружностью радіуса R, проведемъ въ точкѣ M касательную, которая будетъ искомая линія.

2) Изъ точки O, радіусомъ $R + r$, описываемъ окружность и проводимъ изъ O_1 касательную къ ней; пусть будетъ C точка касанія, проведя радіусъ OC, который пересѣчетъ окружность радіуса R въ точкѣ N, проводимъ въ N касательную, которая будетъ искомою линіею.

114. Построивъ уголъ ABC равный m, проведемъ линію параллельную линіи AB, на разстояніи r отъ нея и линію, дѣлящую уголъ ABC пополамъ; точка пересѣченія O этихъ двухъ линій есть центръ вписаннаго круга. Описавъ этотъ кругъ и изъ точки B радіусомъ h другой кругъ, проведемъ къ этимъ двумъ кругамъ общую касательную, которая пересѣчетъ линіи AB и CB въ точкахъ M и N; MBN будетъ искомый треугольникъ.

115. Отложивъ во второмъ кругѣ хорду равную a и описавъ концентрическую окружность, касательную къ этой хордѣ, приводимъ вопросъ къ задачѣ 113.

116. Вопросъ приводится къ задачѣ 113.

117. Изъ центра C круга O_1 проводимъ перпендикуляръ CM къ линіи AB, и беремъ на продолженіи его $MC_1 = MC$; изъ C_1 описываемъ радіусомъ круга O_1 окружность O_2 и проводимъ общую касательную къ кругамъ O и O_2; эта линія пересѣчетъ AB въ искомой точкѣ. Вопросъ допускаетъ четыре рѣшенія.

118. Раздѣливъ хорду AB въ точкѣ C такъ, чтобы $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$ и раздѣливъ пополамъ въ точкѣ M, дугу, стягиваемую хордою AB, проведемъ чрезъ M и C линію, которая пересѣчетъ окружность въ искомой точкѣ.

119. Дуга, стягиваемая хордою, есть шестая часть окружности.

120. Два перпендикулярныхъ между собою діаметра дѣлятъ окружность на четыре равныя части.

121. Если раздѣлимъ радіусъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то хорда, равная большей части радіуса, стягиваетъ дугу равную десятой части окружности (смотр. § 136).

122. Изъ вершины A прямаго угла BAC описываемъ произвольнымъ радіусомъ дугу, которая пересѣчетъ стороны угла въ точкахъ B и C. На дугѣ BC откладываемъ хорду CD равную радіусу, тогда дуга DB будетъ третья часть четверти окружности, а уголъ CAD третья часть прямаго угла.

123. Къ срединѣ дуги AB проводимъ касательную, которая пересѣчетъ стороны OA и OB, положимъ въ точкахъ M и N; кругъ, вписанный въ равнобедренный треугольникъ MON, есть искомый кругъ.

124 Означивъ разстояніе точки A отъ центра чрезъ d, опишемъ изъ точки A радіусомъ $\sqrt{\frac{m}{n}(r^2-d^2)}$ дугу, которая пересѣчетъ окружность, положимъ, въ B; искомая хорда пройдетъ чрезъ точки A и B.

125. Пусть будетъ M точка прикосновенія касательной, проведенной отъ точки A къ кругу; изъ A, радіусомъ $\frac{AM}{\sqrt{2}}$, описываемъ дугу, которая пересѣчетъ кругъ, положимъ, въ точкѣ N; линія, проходящая чрезъ точки A и N, будетъ искомая сѣкущая. Вопросъ возможенъ только тогда, когда разстояніе точки A отъ центра менѣе тройнаго радіуса.

126. Пусть будетъ M точка прикосновенія касательной, проведенной отъ точки A къ кругу; изъ точки A, радіусомъ $AM\sqrt{\frac{n}{m}}$, описываемъ дугу, которая пересѣчетъ кругъ, положимъ въ точкѣ N; линія, проходящая чрезъ точки A и N, будетъ искомая сѣкущая. Вопросъ возможенъ только тогда, когда $d < \frac{m+n}{m-n} \cdot r$, гдѣ r означаетъ радіусъ круга, а d разстояніе центра его отъ точки A.

127. Продолживъ линіи до взаимнаго пересѣченія, впишемъ кругъ въ треугольникъ ими составленный.

128. Пусть будетъ O центръ даннаго круга, AM одна изъ линій, проведенныхъ отъ точки A къ окружности, положимъ, что эта линія дѣлится въ точкѣ N на части въ отношеніи $m:n$. Раздѣливъ линію AO въ точкѣ C на части въ отношеніи $m:n$ и замѣтивъ, что треугольники ANC и AMO подобны, найдемъ $NC = \frac{m}{n+m} . MO$. Это значитъ, что всѣ точки дѣленія находятся отъ C на одинакомъ разстояніи, и поэтому искомое геометрическое мѣсто есть кругъ, описанный изъ точки C радіусомъ $\frac{m}{n+m} . MO$.

129. Продолживъ линіи AB и MN до пересѣченія въ L, откладываемъ на линіи MN часть LO равную средней пропорціональной между линіями AL и BL; кругъ, проходящій чрезъ три точки A, B и O будетъ искомый кругъ. Вопросъ допускаетъ два рѣшенія, соотвѣтствующія положенію O съ лѣвой и съ правой стороны отъ L. Вопросъ невозможенъ, когда точка пересѣченія линій AB и MN лежитъ между точками A и B.

130. Изъ точки пересѣченія L двухъ линій AB и MN проводимъ прямую LO, дѣлящую уголъ между ними пополамъ; на этой линіи лежитъ центръ искомаго круга. Изъ C опускаемъ перпендикуляръ CD на линію OL и продолжаемъ его до точки E, такъ чтобы $DE = CD$; искомый кругъ пройдетъ чрезъ точки E и C и вопросъ приводится къ задачѣ 129.

131. Проведя чрезъ точки A и B кругъ, пересѣкающій данный кругъ въ точкахъ M и N, положимъ, что продолженія линій AB и MN пересѣкутся въ точкѣ S; изъ точки S проводимъ касательную къ данному кругу и пусть будетъ T точка касанія; кругъ, проходящій чрезъ три точки A, B и T, будетъ искомый кругъ, потому что $ST^2 = SM. SN = SA. SB$, т. е. ST будетъ касательная къ кругу, проходящему чрезъ точки A и B.

Вопросъ допускаетъ два рѣшенія, соотвѣтствующихъ двумъ касательнымъ, проведеннымъ изъ точки S къ данному кругу, т. е. внѣшнему и внутреннему прикосновенію двухъ круговъ.

132. Изъ центра O даннаго круга опускаемъ на линію MN, перпендикуляръ OQ, который пересѣчетъ кругъ въ точкахъ R и P, на линіи PA беремъ точку X такъ, чтобы линія PX была четвертая пропорціональная къ тремъ линіямъ PA, PQ и PR. Кругъ, проходящій чрезъ точки A и X и касательный къ линіи MN (задача 131), есть искомый кругъ. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что этотъ кругъ касается линіи MN въ точкѣ T и пусть будетъ C точка пересѣченія линіи TP съ даннымъ кругомъ; изъ подобія треугольниковъ TPQ и RCP слѣдуетъ $PQ. PR = TP. CP$ и, по построенію, $TP. CP = PX. AP$, слѣдов. C есть общая точка обѣихъ окружностей (§ 100), а изъ равенства угловъ OCP и TCS (гдѣ S есть центръ искомаго круга) слѣдуетъ, что точки S, C и O лежатъ на одной прямой.

133. Проведя параллель A_1B_1 къ линіи AB на разстояніи r отъ нея и параллель M_1N_1 къ линіи MN на разстояніи r отъ нея, опишемъ окружность, проходящую чрезъ центръ даннаго круга и касательную къ прямымъ A_1B_1 и M_1N_1 (задача 130). Пусть будетъ R радіусъ этого круга; тогда кругъ, описанный изъ того же центра радіусомъ $R - r$, будетъ искомый кругъ.

134. Положимъ, что $r < R$ и пусть будетъ O центръ меньшаго и O_1 центръ большаго круга. Проведя параллель A_1B_1 къ линіи AB на разстояніи r отъ нея и описавъ изъ точки O_1 радіусомъ $R - r$ кругъ, опишемъ окружность, проходящую чрезъ точку O и касательную къ прямой A_1B_1 и къ кругу радіуса $R - r$ (задача 132). Пусть будетъ ρ радіусъ этого круга; концентрическій съ нимъ кругъ радіуса $\rho \pm r$ есть искомый кругъ.

135. Пусть будутъ O_1 и O_2 центры данныхъ круговъ радіусовъ r и R и положимъ $r < R$. На линіи $O_1\ O_2$ возьмемъ точку I такъ, чтобы $\frac{O_2I}{O_1I} = \frac{R}{r}$, тогда касательная, проведенная отъ точки I къ одному изъ данныхъ круговъ, будетъ также касательною и къ другому кругу. Пусть будутъ T и S точки касанія.

На линіи, идущей отъ I къ A, опредѣлимъ часть IX равную четвертой пропорціальной между линіями IA, IT и IS такъ, чтобы $\frac{IA}{IT} = \frac{IS}{IX}$, и проведемъ кругъ чрезъ точки A и X, касательный къ кругу радіуса r (задача 131); этотъ кругъ будетъ искомый. Въ самомъ дѣлѣ пусть будетъ O центръ его, N точка касанія его съ кругомъ O_1, M и H точки пересѣченія линіи IN съ кругами O_2 и O_1; тогда $IS.IT = IT^2. \frac{R}{r} = IT^2. \frac{IM}{IH} = IN . IH. \frac{IM}{IH} = TN . IM$, слѣдов. $IX . IA = IN . IM$, и потому точка M принадлежитъ кругу O, а такъ какъ O_2M и OM параллельны линіи O_1H, то точки O, M и O_2 лежатъ на одной прямой линіи, т. е. точка M будетъ точка касанія.

136. Пусть будетъ $r < r_1 < r_2$ и O, O_1 и O_2 центры круговъ радіусовъ r, r_1 и r_2. Изъ точки O_1 радіусомъ $r_1 - r$ и изъ точки O_2 радіусомъ $r_2 - r$ описываемъ окружности и проводимъ окружность касательную къ нимъ и проходящую чрезъ точку O (задача 135). Пусть будетъ R радіусъ этого круга, тогда концентрическій кругъ радіуса $R - r$ будетъ искомый кругъ.

137. На сторонахъ угла A беремъ какія нибудь точки B и C и, соединивъ ихъ, положимъ, что точка пересѣченія линій дѣлящихъ углы ABC и ACB пополамъ, есть I; тогда линія IA раздѣлитъ уголъ A пополамъ

138. Въ какой нибудь точкѣ A прямой AB возставляемъ перпендикуляръ AP и, продолживъ его, откладываемъ на немъ $AQ = AP$. Вообразимъ линію чрезъ точки P и I, которая пересѣчетъ AB въ точкѣ H и линію чрезъ точки Q и I, которая пересѣчетъ AB въ точкѣ D, наконецъ проводимъ линію чрезъ точки P и D, которая пересѣчетъ прямую HQ въ точкѣ E; линія IE будетъ искомый перпендикуляръ.

139. Изъ точки B опускаемъ перпендикуляръ на линію AC и изъ точки C перпендикуляръ на линію AB (задача 138); положимъ, что эти два перпендикуляра пересѣкутся въ точкѣ O; линія AO будетъ искомый перпендикуляръ.

140. Вообразимъ линію чрезъ точки B и A и возьмемъ на продолженіи ея произвольную точку D; пусть будетъ, кромѣ того, E какая нибудь точка. Вообразивъ четыреугольникъ $BCED$, проведемъ чрезъ A параллель къ діагонали BE, которая пересѣчетъ DE въ точкѣ F, и чрезъ F параллель къ CE, которая пересѣчетъ діагональ DC въ точки G; линія, проходящая чрезъ точки A и G будетъ искомая линія; это слѣдуетъ изъ подобія треугольниковъ AFG и BEC.

141. Проведя чрезъ точку B произвольную линію BC и линію LM ей параллельную, положимъ, что LM пересѣчетъ линіи AB и AC въ точкахъ D и E, тогда

$$AB = \frac{BC . DB}{BC - DE}.$$

142 Проведя линію LM параллельную линіи AB и вообразивъ прямыя LB и MA, которыя пересѣкутся въ точкѣ O опредѣлимъ разстояніе между точками L и B (задача 141) тогда найдемъ $AB = \frac{LM\,(LB - OL)}{OM}$

143. Опредѣливъ разстояніе точекъ A и B (задача 142 и опустивъ перпендикуляръ EK, изъ точки C на линію AB, (задача 139), проведемъ какую нибудь прямую, параллельную линіи AB (задача 140). Положимъ, что эта прямая пересѣчетъ линіи CA, CK и CB въ точкахъ L, N и M, тогда $KC = \frac{AB}{LM} . NC$.

ГЛАВА VI.

144. Проведя въ данномъ кругѣ какой нибудь діаметръ AOB и перпендикулярный къ нему радіусъ OC, опишемъ изъ средины M радіуса OA окружность радіусомъ MC; положимъ, что эта окружность пересѣчетъ радіусъ OB въ точкѣ D; CD будетъ сторона вписаннаго пятиугольника. Она равняется $r\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$.

145. Въ данномъ кругѣ откладываемъ хорду AB, равную радіусу и на дугѣ AB хорду AC, равную сторонѣ вписаннаго десятиугольника, тогда хорда BC будетъ сторона вписаннаго пятнадцатиугольника; она равна $\frac{r}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15}\right)$.

146. Искомый радіусъ $= \frac{r}{\sqrt{2}}$. 147. Искомый радіусъ $= \frac{r}{2}$.

148. Искомый радіусъ $= \frac{r\sqrt{3}}{2}$. 149. Искомый радіусъ $= \frac{r}{4}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$.

150. Искомый радіусъ $= \frac{r}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

151. Сторона вписаннаго двѣнадцатиугольника $= r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

152. Сторона описаннаго двѣнадцатиугольника $= 2r\,(2 - \sqrt{3})$.

153. Сторона вписаннаго осьмиугольника $= r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, а сторона описаннаго $= 2r\,(\sqrt{2} - 1)$.

154. Радіусъ вписан. круга $= \frac{a}{2}$, а радіусъ описан. $= \frac{a}{\sqrt{2}}$.

155. Радіусъ впис. круга$=\frac{a}{2\sqrt{3}}$, а радіусъ описан.$=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

156 Радіусъ вписан. круга$=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, и радіусъ описан. $=a$.

157. Радіусъ вписаннаго круга $=\frac{a}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$, а радіусъ описаннаго круга $=\frac{a}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}$.

158 Радіусъ вписаннаго круга$=\frac{a\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$; а радіусъ описаннаго круга$=\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$.

159. Радіусъ вписаннаго круга$=\frac{a(2+\sqrt{3})}{2}$, а радіусъ описаннаго круга$=a\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

160. Означимъ искомый радіусъ вписаннаго круга чрезъ r_1 и искомый радіусъ описаннаго круга чрезъ R_1, тогда $r_1=\frac{r+R}{2}$ и $R_1=\sqrt{R\,r_1}$.

ГЛАВА VII.

161. Линія параллельная основанію.
162. Площадь равна 18159, 184 кв. ф. 163. Площадь равна 13888,6 кв. ф.

164. Площадь равна 327, 42 кв. ф. 165. Площадь равна $\frac{p.\,r}{2}$.

166 Опишемъ на линіи $AB=a$ дугу ACB, вмѣщающую данный уголъ m, и пусть будетъ радіусъ этой дуги r. Опредѣливъ линію l такъ, чтобы k была средняя пропорціональная между $\frac{a}{2}$ и l, проведемъ параллель къ линіи AB, на разстояніи l отъ нея и положимъ, что она пересѣчетъ дугу ACB въ точкѣ C; ACB будетъ искомый треугольникъ. Вопросъ допускаетъ два рѣшенія, одно рѣшеніе, или онъ невозможенъ, смотря потому, будетъ ли $\frac{2k^2}{a}$ меньше, равно или больше $r\pm\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$; знакъ $+$ относится къ тому случаю, когда m означаетъ острый, а знакъ — когда m означаетъ тупой уголъ.

167. Тоже построеніе какъ въ 166.
168. Раздѣливъ сторону AD въ точкѣ E на двѣ части въ отношеніи $m:n$, положимъ, что $AE<ED$; откладываемъ на FD часть $EF=AE$; прямая, проходящая чрезъ средину линіи BF параллельно линіи LM есть искомая линія.
169 Діагональ даннаго квадрата есть сторона искомаго.
170. Половина діагонали даннаго квадрата есть сторона искомаго.
171. Средняя пропорціональная между основаніемъ и высотою даннаго параллелограмма есть сторона искомаго квадрата.
172. Средняя пропорціональная между основаніемъ и половиной высоты даннаго треугольника есть сторона искомаго квадрата.
173. Опредѣлить четвертую пропорціональную къ тремъ линіямъ H, b и h или B, b и h.
174. Построивъ прямоугольный триутольникъ ABC, котораго катеты AB и BC равны a и b, строимъ на гипотенузѣ AC прямоугольный треугольникъ ACD, котораго катеты будутъ AC и $CD=c$; и. т. д.
175. Строимъ прямоугольный треугольникъ, котораго гипотенуза есть a и одинъ изъ катетовъ b.
176. Замѣтивъ, что $154=12^2+3^2+1^2$, приводимъ вопросъ къ опредѣленію стороны квадрата, равновеликаго суммѣ трехъ квадратовъ, которыхъ стороны соотвѣтственно равны 12, 3 и 1.
177. Въ точкѣ B проводимъ перпендикуляръ BC къ линіи BA и беремъ $BC=k$; въ срединѣ линіи AC возставляемъ къ AC перпендикуляръ, который пересѣчетъ линію AB въ точкѣ D; въ точкѣ D возставляемъ къ линіи AB перпендикуляръ, который пересѣчетъ прямую LM въ искомой точкѣ. Вопросъ допускаетъ два рѣшенія.
178. На линіи $AB=k$ описываемъ полукругъ и, опредѣливъ четвертую пропорціональную l къ тремъ линіямъ k, b и h, проводимъ параллель къ прямой AB на разстояніи l отъ нея. Положимъ, что эта параллель пересѣчетъ окружность въ точкѣ C; AC и BC будутъ искомыя линіи. Вопросъ возможенъ только тогда, когда $bh<\frac{k^2}{2}$.

179. Раздѣлимъ какую нибудь линію AB въ точкѣ C на двѣ части въ отношеніи 3: 5, опишемъ на AB полукругъ и возставимъ въ C перпендикуляръ къ AB, который пересѣчетъ окружность, положимъ, въ точкѣ H; на линіи HB отложимъ часть HK, равную сторонѣ даннаго квадрата, и проведемъ чрезъ K параллель къ AB, которая пересѣчетъ линію AH, положимъ, въ точкѣ L; HL будетъ сторона искомаго квадрата. Построеніе возможно, когда $AB>\frac{4k}{\sqrt{109}}$, гдѣ k есть сторона даннаго квадр.

180. Раздѣливъ основаніе на m равныхъ частей, соединимъ вершину съ точками дѣленія основанія.
181. Обративъ многоугольникъ въ равновеликій треугольникъ, приводимъ вопросъ къ задачѣ 172.

182. Пусть будутъ a и a_1 сходственныя стороны двухъ данныхъ многоугольниковъ, тогда сторона искомаго многоугольника будетъ $\sqrt{a^2+a_1^2}$.

183. Если a есть одна изъ сторонъ даннаго многоугольника, то сходственная сторона искомаго многоугольника будетъ $a\sqrt{\frac{m}{n}}$.

184. Пусть будутъ c и c_1 стороны двухъ квадратовъ, равновеликихъ даннымъ многоугольникамъ и a одна изъ сторонъ перваго изъ двухъ многоугольниковъ, тогда сходственная сторона искомаго многоугольника будетъ $\frac{ac_1}{c}$.

185. Построивъ прямоугольный треугольникъ ABC, котораго катеты AB и BC равны сторонамъ двухъ данныхъ квадратовъ, опустимъ изъ вершины B прямаго угла перпендикуляръ BD на гипотенузу; части гипотенузы AD и DC суть искомыя линіи.

186. Площадь равна 22,45 кв. ф.

187. Площадь трапеціи равна

$$\frac{a+b}{4(a-b)}\sqrt{(c+d+a-b)(c+d+b-a)(c+a-b-d).(a+d-b-c)}.$$

188. Изъ точки B опускаемъ на сторону AC перпендикуляръ, который пересѣчетъ ее, положимъ, въ точкѣ L; опредѣлимъ на сторонѣ AC такую точку E, чтобъ AE была средняя пропорціональныя между $\frac{AC}{2}$ и LC, тогда перпендикуляръ, возставленный къ линіи AC въ точкѣ E, будетъ искомая линія.

189. Чрезъ средину D линіи AC проводимъ параллель къ линіи OB, которая пересѣчетъ сторону BC, положимъ, въ точкѣ E; OE будетъ искомая линія.

190. Раздѣливъ сторону AC въ точкахъ L и M на три равныя части, проведемъ чрезъ L параллель къ AB и чрезъ M параллель къ BC; точка пересѣченія этихъ двухъ линій есть искомая точка.

191. Перпендикуляръ, опущенный изъ точки B на сторону AC, дѣлимъ въ точкѣ L на двѣ части въ отношеніи $m : n+r$, и перпендикуляръ, опущенный изъ точки C на сторону AB, дѣлимъ въ точкѣ M на двѣ части въ отношеніи $n : m+r$. Проведемъ чрезъ L параллель къ AC и чрезъ M параллель къ AB; пересѣченіе этихъ двухъ параллелей есть искомая точка.

192. Линія, отстоящая отъ вершины на разстояніе $\frac{h}{\sqrt{2}}$, гдѣ h означаетъ высоту треугольника, раздѣляетъ треугольникъ пополамъ.

193. Высота искомаго прямоугольника есть четвертая пропорціональная къ линіямъ a, b и h.

194. На линіи AB, равной p, опишемъ полукругъ и проведемъ параллель къ прямой AB на разстояніи k отъ нея; изъ точки пересѣченія M этой параллели съ окружностью опустимъ перпендикуляръ MN на діаметръ AB; линіи AN и NB будутъ стороны искомаго прямоугольника.

Вопросъ возможенъ, когда k небольше $\frac{1}{2}p$.

195. Обративъ данный прямоугольникъ въ равновеликій квадратъ, приводимъ вопросъ къ задачѣ 194.

196. На линіи $AB = p$ опишемъ полукругъ и отложимъ хорду $AC = k$; изъ точки C опустимъ перпендикуляръ CD на діаметръ AB; AD будетъ искомая часть линіи AB. Вопросъ возможенъ, когда $k < p$.

197. Изъ какой нибудь точки O опишемъ кругъ радіусомъ равнымъ $\frac{d}{2}$ и проведемъ въ какой нибудь точкѣ M окружности касательную $MN = k$. Положимъ, что линія NO пересѣчетъ окружность въ точкахъ A и B; AN и BN будутъ стороны искомаго прямоугольника.

198. На линіи $AB = a$ опишемъ полукругъ и проведемъ параллель къ линіи AB на разстояніи $\frac{2k^2}{a}$ отъ нея. Положимъ, что эта параллель пересѣчетъ окружность въ точкѣ C; тогда ABC будетъ искомый треугольникъ.

Вопросъ возможенъ только тогда, когда k небольше $\frac{a}{2}$.

199. Пусть будетъ t длина касательной, проведенной чрезъ точку А, x внѣшняя часть сѣкущей, тогда $x^4 - \left(t^2 + \frac{k^2}{2}\right)x^2 + \frac{t^4}{2} = 0$.

Вопросъ возможенъ когда $k \geqq t.\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$.

200. Положимъ, что $h > h_1 > h_2$ и построимъ треугольникъ ABC, котораго стороны $AB = h$; $BC = h_1$ и $AC = \frac{hh_1}{h_2}$. Опустимъ изъ A перпендикуляръ AD на сторону BC и возьмемъ на этомъ перпендикулярѣ часть $DAL = h$; за тѣмъ проведемъ чрезъ L линіи параллельныя сторонамъ AC и AB, которыя пересѣкутъ прямую BC, положимъ, въ M и N; LMN будетъ искомый треугольникъ.

Вопросъ возможенъ только тогда, когда $hh_1 < hh_2 + h_1h_2$.

201. Основаніе y и высота x искомаго прямоугольника опредѣляются изъ уравненій: $x.y = k^2$; $yh + xb = bh$, гдѣ k есть сторона даннаго квадрата.

Вопросъ возможенъ когда h не менѣе $\frac{4k^2}{b}$.

202. Площадь равна $3r^2$.

203. Площадь триугольника равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, пятиугольника— $\frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$, шестиугольника $=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, десятиугольника $\frac{5a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$, двѣнадцатиугольника—$3a^2(2+\sqrt{3})$

204. Площадь описаннаго квадрата равняется $2k^2$, а шестиугольника $\frac{4}{3}k^2$

205. Проведя чрезъ точку D линію LM параллельно линіи BC, положимъ, что она пересѣчетъ сторону AB въ точкѣ L; составимъ параллелограммъ $BLMN$, равновеликій данному параллелограмму; въ точкѣ N возставимъ къ линіи BC перпендикуляръ NP, лежащій внѣ угла ABC, и составимъ прямоугольный триугольникъ NPT такъ, чтобы катетъ $NP = LD$, гипотенуза $PT = DM$ и катетъ NT былъ бы продолженіемъ стороны BN; прямая, проходящая чрезъ точки D и T, есть искомая линія. Вопросъ возможенъ только тогда, когда точка D лежитъ между точками L и M и когда $LD < DM$.

ГЛАВА VIII.

206. Отношеніе двухъ угловъ равно $\frac{sr_1}{s_1r}$.

207. Площадь круга равна 1493,01... квадр. фут.

208. Площадь круга равна 569,55... квадр. фут.

209. 463,7... метр.

210. Заднія колеса дѣлаютъ приблизительно 398, а переднія $596\frac{2}{3}$ оборотовъ.

211. Дуга равна 0,29598.. фут.

212. Радіусъ параллельнаго круга равенъ 4341989 метр.

213. Площадь сегмента равна $\frac{2sr - c\sqrt{4r^2-c^2}}{4}$.

214. Діаметръ равенъ 60,3401.... фут.

215. Радіусъ равенъ 15,4158...фут.

216. Площадь сектора равна 65,4499..... кв. фут.

217. Радіусъ равенъ 163,144 ..

218 Радіусъ равенъ $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \ldots}$

219. Радіусъ равенъ $\sqrt{r_1^2 - r_2^2}$.

220 Радіусы круговъ будутъ $\frac{mr}{\sqrt{m^2+n^2+p^2+q^2}}$; $\frac{nr}{\sqrt{m^2+n^2+p^2+q^2}}$; $\frac{pr}{\sqrt{m^2+n^2+p^2+q^2}}$; $\frac{qr}{\sqrt{m^2+n^2+p^2+q^2}}$.

221. Радіусы концентрич. круговъ будутъ $r\sqrt{\frac{1}{m}}$; $r\sqrt{\frac{2}{m}}$; $r\sqrt{\frac{3}{m}}$;...

222. Площадь равна $\pi d^2 + 2\,dk\sqrt{\pi}$.

223. Чрезъ какую нибудь точку, лежащую на окружности меньшаго круга, проведемъ касательную, которая пересѣчетъ внѣшнюю окружность, положимъ, въ точкахъ A и B; линія AB будетъ діаметръ искомаго круги

ЧАСТЬ II. СТЕРЕОМЕТРІЯ.

ГЛАВА I.

224. Проведя чрезъ A на плоскости MN двѣ прямыя, возставимъ въ этой точкѣ перпендикуляръ къ нимъ.

225 Проведя на плоскости MN какую нибудь прямую AB, опустимъ изъ O перпендикуляръ на AB и положимъ, что онъ встрѣтитъ линію AB въ точкѣ Q; проведемъ чрезъ Q на плоскости MN линію QP перпендикулярную къ AB; перпендикуляръ, опущенный изъ O на линію QP, будетъ искомый перпендикуляръ.

226. Проведя чрезъ точку O и прямую AB плоскость, проводимъ на этой плоскости чрезъ точку O линію параллельную линіи AB.

227. Проведя на плоскости MN какую нибудь прямую AB, проводимъ чрезъ точку O линію ей параллельную.

228. 1. Если точка O лежитъ на линіи AB, то возставивъ въ точкѣ O два перпендикуляры OP и OQ къ линіи AB, проведемъ плоскость чрезъ эти перпендикуляры.

2. Если точка O лежитъ внѣ линіи AB, то изъ O опускаемъ перпендикуляръ на линію AB, который пересѣчетъ ее, положимъ, въ P; чрезъ точку P проводимъ линію PQ перпендикулярную къ AB; плоскость, проходящая чрезъ линіи OP и PQ будетъ искомая плоскость.

229. Чрезъ точку O проводимъ линіи OP и OQ, соотвѣтственно параллельныя линіямъ AB и MN; плоскость, проходящая чрезъ OP и OQ, будетъ искомая плоскость.

230. Чрезъ какую нибудь точку C прямой AB проводимъ линію CD параллельную линіи MN; плоскость, проходящая чрезъ AB и CD, будетъ искомая плоскость.

231. Опустивъ изъ точки O перпендикуляръ OP на плоскость MN, проведемъ чрезъ точку O плоскость перпендикулярную къ линіи OP.

232. Чрезъ линію AB проводимъ плоскость параллельную прямой MN и чрезъ линію MN плоскость параллельную прямой AB; разстояніе этихъ двухъ плоскостей есть искомое разстояніе

ГЛАВА IV.

233. Искомая сторона равна 40.

234. Искомый объемъ воздуха равенъ 12181,5369... куб. ф.

235. 51,48 куб. фут. воды.

236. Боковая поверхность равна $3R\sqrt{H^2+\frac{3R^2}{4}}=3299,53$; а объемъ равенъ $\frac{\sqrt{3}}{2}R^2H = 15767,7$

237. Высоты полной пирамиды и отсѣченной части ея будутъ равны $\frac{mH}{m-n}$ и $\frac{nH}{m-n}$. Плоскость параллельная основаніямъ на разстояніи $H.\frac{m-\sqrt[3]{\frac{m^3+n^3}{2}}}{m-n}$ отъ нижняго основанія раздѣляетъ усѣченную пирамиду на двѣ равновеликія части.

238. Если чрезъ h означимъ высоту пирамиды, то плоскость параллельная основанію, отстоящая на $\frac{h}{\sqrt[3]{2}}$ отъ вершины, раздѣлитъ пирамиду на двѣ равновеликія части.

239. Раздѣливъ какую нибудь сторону основанія ABC, напр. сторону AB, въ точкѣ D на части въ отношеніи $m:n$, проведемъ плоскость чрезъ три точки S, C и D.

240. Объемъ всей пирамиды равенъ $\frac{H.B.\sqrt{B}}{3(\sqrt{B}-\sqrt{b})}$, а объемъ отсѣченной пирамиды равенъ $\frac{H.b.\sqrt{b}}{3(\sqrt{B}-\sqrt{b})}$.

ГЛАВА V.

241. Разстояніе равно 6. ф.

242. Изъ какой нибудь точки поверхности шара описываемъ на ней окружность какимъ нибудь радіусомъ r и, взявши на этой окружности три какія нибудь точки A, B и C, строимъ на какой нибудь плоскости треугольникъ ABC и описываемъ около него кругъ. Пусть O будетъ центръ этого круга и DOD_1 діаметръ. Проведя линію OE перпендикулярно къ этому діаметру, построимъ прямоугольный треугольникъ DOE, въ которомъ гипотенуза $DE=r$. Если въ срединѣ линіи DE возставимъ перпендикуляръ и продолжимъ его до пересѣченія съ линіею OE, или съ продолженіемъ ея въ точкѣ P, тогда PE будетъ искомый радіусъ.

243. Объемъ усѣченнаго конуса равенъ 2,56943 куб. ф.

244. Объемъ шара равенъ $\frac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{\pi}}$.

245. Поверхность равна 5092962 квадр. миріаметр; объемъ равенъ приблизительно 1081 милліоновъ кубич. миріаметровъ

246. Радіусъ шара равенъ 0,282.. фут.

247. Радіусъ равенъ 1,336. .фут.

248. Поверхность пояса равна 202800 квад. миріаметр.

249. Поверхность полосы равна 210600 квадр. миріаметр.

250. Высота цилиндра равна 2,417.. фут.

251. Объемъ конуса равенъ 1017,87... куб. фут.

252. Радіусъ равенъ 0,6827... фут.

253. Высота литра равна 1,7205 дециметр., а радіусъ основанія равенъ 0,4301 дециметр.

254. Поверхности двухъ цилиндровъ равны, а объемы ихъ обратно пропорціональны ихъ высотамъ.

255. Толщина оболочки равна 0,0007 миллиметр.

256. Замѣтивъ, что сторона описаннаго треугольника равна $2\sqrt{3r}$, а высота его равна $3r$, найдемъ 1) поверхность шара — $4\pi r^2$, 2) боковая поверхность цилиндра — $4\pi r^2$, а полная поверхность — $6\pi r^2$; 3) боковая поверхность конуса — $6\pi r^2$, полная поверхность его — $9\pi r^2$; 4) объемъ шара — $\frac{4}{3}\pi r^3$, 5) объемъ цилиндра — $2\pi r^3$, 6) объемъ конуса — $3\pi r^3$.

КОНЕЦЪ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ОПЕЧАТКИ.

Стран.	строк.	*Напечатано.*	*Должно быть:*
18	7 снизу	B_1 на B	C_1 на C
19	1 —	A_1	A
35	10 сверху	уголъ a	уголъ b
54	10 снизу	$\frac{AB}{BC}$	$\frac{AB}{BE}$
55	— —	$\frac{CB}{DC}$	$\frac{CB}{DB}$
60	8 сверху	A_1A_1	A_1B_1
60	2 снизу	$B_1C_1D_1$	$A_1C_1D_1$
65	12 сверху	R	R_2
72	15 снизу	равно 5	равно 2
86	10 —	EGD	CGD
96	9 сверху	$C_1B = CD_1$	$C_1B = CD$
—	10 снизу	$a. AE - c. BE = ad$	$a. AE - c. BE = a.b$
112	8 —	описаннаго	вписаннаго
127	3 —	описаннаго около круга	вписаннаго въ кругъ
280	13 сверху	KAB	AKB
281	1 —	$\frac{(a^2+4r^2}{4r(a^2-4r^2)}$	$\frac{(a^2+4r^2)^2}{16r\,(a^2-4r^2)}$